"EL LOGICISMO EN BERTRAND RUSSELL"

ESBOZO DE SUS CONSECUENCIAS FILOSOFICAS

Luis Felipe Guerra Martiniere

INTRODUCCION

Durante el presente siglo la Lógica ha experimentado una evolución tan profunda, que se ha conmovido toda la estructura que tradicionalmente poseía. De un lado, la corriente que podríamos calificar de "ontológica", como es la representada por Husserl y Hartmann, y de otro la llamada "Logística", iniciada por Russell, Hilbert y Brouwer, han puesto de relieve aspectos insospechados de esta ciencia. Muy especialmente la Logística ha sido quien proporcionara una orientación completamente nueva a la Lógica, pues convirtiéndola primero en un instrumento de análisis de valor inapreciable, y después aplicándola a los problemas tradicionales de la Filosofía, ha llegado a construir toda una metafísica de la realidad, con sólo elementos lógicos.

Si bien la orientación antes citada ha elevado la Lógica a las regiones de la metafísica, es preciso reconocer también que ha olvidado una labor fundamental en todo progreso científico: la reflexión sobre la propia realidad en desarrollo. En verdad la Logística emprende la tarea de resolver problemas que desde hace siglos han preocupado a los filósofos, pero deja de lado los que plantea ella misma como objeto del conocimiento filosófico. En otras palabras, no se ha intentado llegar a una determinación de las repercusiones filosóficas que pueda presentar esta evolución de la Lógica. Esta labor es la que intenta, con las restricciones propias a la persona del autor, realizar la presente tesis.

Para acometer esta tarea se ha escogido un miembro de la corriente logística que parece poseer las características necesarias. Es Bertrand Russell, el pensador inglés, cuyo sistema lógico se considera ya entre los clásicos de esta ciencia. Por este motivo podemos decir que es su sistema el primero debidamente estructurado dentro de los cánones científicos, y que posee, en germen, todas las direcciones que posteriormente ha desarrollado la Logística; así podemos encontrar en el autor, un principio de semiótica, aunque desde luego bastante rudimentario; igualmente podemos hallar el cálculo lógico, el análisis logístico, los comienzos de una interpretación lingüística de la realidad, etc. Además de estas circunstancias, existen otras que colaboran a considerar a Russell como un representante típico del movimiento logístico, como es el hecho de que su situación histórica nos pone en contacto con uno de los sistemas que más aportes ha dado para el progreso posterior, pues sea para superar a Russel, o para restablecer sus premisas, todos los sistemas que le han seguido tienen que hacer alguna referencia a él. Desde luego que no pretendemos una total vigencia de este autor, más si su significación dentro del movimiento general.

El estudio de la obra logística de Russell impone ciertas orientaciones especiales al estudio que se va a realizar. Una de éllas nos indica que debemos ceñirnos a este aspecto del pensamiento del autor, pues como Russell ha mostrado siempre una fecundidad extraordinaria en todos los campos de la investigación filosófica, no es posible pensar en un estudio de todo su pensamiento filosófico; desde luego qué habrá que recurrir a él, en cuanto se relaciona con el aspecto elegido, pero nò más allá. Esta aclaración tiene por fin, precisar el objeto de estudio, por cuanto puede parecer incompleta una visión de todo su pensamiento. En otras palabras, es sólo su pensamiento lógico lo que queremos estudiar.

Hemos dicho que intentamos un esbozo de la significación del movimiento logístico dentro de la filosofía general, más ahora que hemos planteado el modo como lo realizaremos, convienen unas palabras respecto al alcance que pretende el trabajo. En principios, la tesis es sólo un intento al respecto, por ellos nos limitamos a un autor, y concretando la finalidad del trabajo, podríamos decir que busca hallar la significación del sistema de Russell tan sólo.

Finalmente, unas palabras sobre el material de trabajo. Como punto de partida, el material empleado está limitado a las posibilidades de nuestro medio, donde los estudios logísticos aún no han tomado el auge que debieran; por este motivo siempre cabrá alguna omisión.

CAPITULO I

CIRCUNSTANCIAS HISTORICAS

Toda especulación filosófica está en estrecha dependencia con las circunstancias históricas que la rodean, de aqui la importancia de precisarlas, pues ha de servir para evidenciar las exigencias inmediatas que obligaron al análisis filosófico. Desde otro punto de vista, también las circunstancias históricas precisan que elementos han sido recogidos de la época, y utilizados en la construcción del sistema.

En el caso presente de Lord Bertrand Russell, esta influencia está, como lo veremos más adelante, bastante marcada desde que su sistema lógico es una respuesta a los problemas de la Matemática de su tiempo. Por este motivo, hemos de comenzar el estudio con una exposición de los hechos históricos que rodean la obra de Russell, y que se concretan en dos lineas convergentes, siendo una exclusivamente matemática, y la otra, la evolución propiamente lógica, que ha de culminar en la obra misma de Russell. Examinemos una por una.

Durante el S. XIX las Ciencias Matemáticas alcanzaron un desarrollo que puede adjetivarse de espectacular. Las teorías clásicas fueron las primeras en sufrir el impacto de esta transformación, desde que sus principios resultaban inadecuados para los descubrimientos que se iban produciendo en sucesión vertiginosa. Así la Geometría y la Aritmética pronto presentaron un carácter revolucionario, orientado hacia un apartamiento de la matemática ortodoxa. Si analizamos la Geometria encontraremos la prueba de lo dicho en el surgimiento de la dirección no-euclideana; examinemos este punto.

Es conocido que la Geometria Clásica está apoyada en las investigaciones de Euclides, quien en su obra "Elementos" resumió, con sentido sistemático, las investigaciones de su época. Destaca en su obra la fundamentación lógica de las demostraciones que da a las proposiciones matemáticas que emplea, labor que sigue el esquema que indicamos a continuación: se parte de principios cuya evidencia reside en su captación intuitiva, deduciendo luego de ellos las consecuencias que podían derivarse desde el punto de vista lógico. Resulta que la impoitancia del sistema reside en la demostración lógica que acompaña a cada teorema geométrico que en última instancia, está apoyado en la certeza de los principios iniciales.

Durante mucho tiempo el trabajo de Euclides pareció definitivo, y por ende, suficiente para sustentar cualquier desarrollo posterior de la Geometría, mas, como sucede siempre con los trabajos definitivos, al progresar la investigación científica y al profundizar al mismo tiempo el porqué de los fundamentos, se comenzaron a descubrir algunas grietas en el edificio euclideano. Por este camino se tropezó con el célebre "V Postulado" [1], que pese a ser considerado como uno de los más evidentes, no pudo ser demostrado en forma alguna, persistiendo esta situación contra todos los procedimientos lógicos que se emplearon. Es de notar, y este hecho es fundamental, que en el S. XVII un sacerdote jesuita, Gerolamo Saccheri, había intentado resolver este problema, recurriendo para ello a la demostración por el absurdo, es decir, que supuso la falsedad del postulado y desarrolló todas las consecuencias posibles esperando así mostrar lo incongruente de tales consecuencias y por tanto, la verdad del postulado, más los resultados fueron negativos, y más aún, sorprendentes, pues no sólo quedó indemostrada la verdad del postulado, sino que también se pudo comprobar la legitimidad lógica de las consecuencias de la hipótesis, dándose así el caso de la posibilidad de geometrías diferentes de la euclidena.

Las posibilidades entrevistas por Saccheri fueron explotadas por diversos matemáticos, destacando de éllos, por la importancia de sus teorías el ruso Nicolás Ivanovich Lobatschefski y el alemán Riemann. El primero de éstos, construyó un sistema geométrico coherente y sin contradicciones partiendo de postulados distintos de los clásicos, demostrando así proposiciones tan sorprendentes como aquella que afirma que por un punto dado fuera de una recta, se pueden trazar dos paralelas a ella, sin que lleguen a confundirse en una sola. En contraste con este sistema surge algún tiempo después el Dr. Remann, que entre sus postulados contiene el que afirma que por un punto dado fuera de una recta, no se puede trazar ninguna paralela a ella; como se aprecia, son dos sistemas geométricos con postulados opuestos entre sí y diferen-

---

[1] Textualmente, el postulado dice: "Si una línea recta que corta a otras dos forma ángulos internos del mismo lado de la secante cuya suma sea menor de dos rectos, aquéllas dos, prolongadas hacia ese lado, se encuentran".

tes a los tradicionales; en consecuencia, la Geometría estaba sufriendo una transformación no sospechada antes.

Más este progreso de la Geometría arrastraba tras si problemas de índole filosófico. Primeramente, se había comprobado que los postulados geométricos, considerados desde hacía siglos como el modelo de proposiciones evidentes por si mismas, afirmaban la falsedad de cualquier postulado contrario a éllos, no suponiéndose por lo tanto que aquéllos podían dar origen a sistemas matemáticos distintos y sin contradicción. Tal hecho exigía considerar la naturaleza de los postulados científicos, para comprobar si, efectivamente, la condición de verdades evidentes por sí mismas les pertenecía, aunque se diesen juicios contrarios que poseían una demostración sin contradicciones. Desde luego que esta labor requería un método adecuado, siendo en este punto donde se comprueba que la Lógica Clásica no presentaba las condiciones necesarias, motivo más que suficiente para buscar una lógica de mayor perfección y capacidad técnica de análisis.

La consecuencia citada implicaba otra de no menor trascendencia. La verdad de los postulados en "crisis", se había sostenido en la Lógica Clásica, se descubría por intuición intelectual desde que eran tan evidentes por su propia enunciación que relevaban de toda demostración lógica; las nuevas geometrías destruyeron esta confianza en la intuición, ya que las consecuencias de un postulado, como era el caso de las paralelas, podían contradecirlo y no por eso dejar de ser correctas. De nuevo se presentaba la necesidad de un análisis lógico, pero con la característica de tener que evitar el peligro de recurrir a la intuición para fundamentar la estrictez de un principio; lo que se precisaba era la *prueba racional*, estructurada en moldes lógicos; nada se conseguía con la afirmación intuitiva de que eran "evidentes por sí mismos", sólo la razón podía fundamentarlos.

Estas eran las consecuencias del progreso de la Geometría. Por su parte, la Aritmética también presentaba sus exigencias de una nueva lógica. Veamos los hechos que surgieron en este campo.

Comencemos por la célebre "Teoría de los Conjuntos". Para exponerla, pongamos nuestra atención en el hecho de que los objetos individuales pueden agruparse de dos maneras: una, que constituye un agrupamiento homogéneo, tendría por base relaciones estrechas entre las propiedades de sus componentes; otra, que podemos llamar heterogénea, vincularía sus elementos sin recurrir a propiedades comunes, el único lazo entre ellos sería el formar un grupo. Esta reunión de elementos heterogéneos, es lo que se denomina un *conjunto*.

Jorge Cantor, matemático alemán, descubrió la posibilidad de un estudio científico de los conjuntos, y desarrollando esta idea, creó una teoria al respecto. Primeramente, buscó el motivo por el cual un conjunto podia ser un todo determinado, encontrándolo en el orden de los elementos para lo cual cada uno debía ocupar un lugar fijo, a partir de la existencia de un primer elemento ya precisado; enseguida determinó los casos en que un objeto puede decirse que pertenece al conjunto; quizá esta última circunstancia parezca incongruente con la explicación de conjunto dada lineas arriba, más cabe indicar que Cantor comprobó que los conjuntos una vez determinados, pese a ser agrupamientos heterogéneos, siguen leyes estrictas de composición, convirtiéndose así en entes diferentes a sus partes constitutivas. Este problema que acabamos de mencionar es de suma importancia, ya que más tarde vamos a ver que origina las molestas "paradojas" matemáticas, y que constituyen una de las principales dificultades que deberá vencer Russell al construir su sistema lógico.

Mencionemos también otro aspecto de esta teoria, cual es las relaciones que se dan entre conjuntos diferentes; destaca entre ellas, la llamada coordinación biunívoca, es decir, la relación de uno a uno que se establece entre los elementos de dos conjuntos. Indicaremos para finalizar este punto, que existen conjuntos de dos clases: finitos e infinitos, determinándose esta propiedad por la cantidad de elementos que posea el conjunto, los que podrán ser limitados o ilimitados.

La Teoría de los conjuntos tiene estrecha vinculación con la Aritmética, pues cada conjunto puede asemejarse a un número sea por que consideremos el número como un conjunto que agrupa bajo sí una multiplicidad de elementos, o porque pensemos que una serie de números, la de los números naturales por ejemplo, equivale también a un conjunto. Esta equivalencia llevó a Cantor a considerar la Teoria de los Conjuntos como el fundamento de la Aritmética, llegando por este camino a reestructurarla del todo. Un primer resultado fue el enriquecimiento de la noción de número, al admitirse la existencia de números infinitos, basados en los conjuntos infinitos; de este modo se daba una solución a problemas matemáticos planteados desde la creación del cálculo infinitesimal, quien atrajo la atención sobre la existencia del infinito como problema aritmético.

La revolución que llevó esta teoria a los fundamentos de la Aritmética es bien clara, pues reemplazó la idea de cantidad discontinua como fundamento por la noción de conjunto, sirviendo tal motivo de base a la afirmación de Russell de que la Matemática es independiente de la idea de cantidad, lo cual permitirá el paso de la Matemática a la

Lógica, fundiéndose ambas, según Russell, en una sola ciencia. Por otra parte, el trabajar con elementos infinitos exige procedimientos lógicos de mayor formalización que los tradicionales, y por esta razón ha de surgir una lógica de la extensión, que busca un lenguaje del todo formal y que lo haya en el empleo del símbolo.

Hablemos ahora de una última circunstancia matemática: la Teoría de las Funciones. Esbozada por Descartes en sus investigaciones geométricas, perfeccionada luego por Euler, adquirió en el S. XIX un desarrollo profundo, que la ha llevado a un sitial privilegiado dentro del campo de las Matemáticas Puras; parte esta teoría de considerar una noción bastante simple, la de función que quiere significar una cantidad cuyo valor depende de otra que suele ser variable; en las Matemáticas esta relación se vincula a los conjuntos de números, permitiendo establecer con exactitud todas las relaciones posibles. Se suele representar una función matemática por la siguiente fórmula: $f(x)$, la que indica que la cantidad "f" tiene un valor que depende de "x". En la actualidad existen estudios especializados de esta teoría, destacando con toda nitidez los de Weierstrass, dedicada principalmente al esclarecimiento de las relaciones que existen entre la variable y la constante. Es de gran importancia esta teoría, por cuanto ha servido, como lo veremos a su tiempo, para que Russell obtenga uno de los elementos de sistema lógico, pues la función matemática servirá de inspiración al concepto de "función proposicional" y también al de "relación funcional" que son puntos básicos para comprender la doctrina en estudio.

Hasta aquí los acontecimientos en el terreno de la Matemática. En el campo de la Lógica se va produciendo, en forma paralela, una revolución de igual o mayor importancia; éstos dos movimientos de renovación van a coincidir en la necesidad de una nueva lógica para el conocimiento matemático y también para el conocimiento en general, dando como resultado final la Logística contemporánea. Pero aquí es preciso indicar que la renovación lógica no depende exclusivamente de las necesidades de la Matemática, desde que ha existido un impulso intrínseco de propio e independiente desarrollo, siendo por esta razón tan sólo la causa ocasional la problemática que presentaron las Ciencias Matemáticas. Vamos a intentar en lo que sigue, una breve visión del movimiento logístico en cuanto puede servir de antecedente a la doctrina de Russell, para así determinar las posibles vinculaciones.

Para iniciar esta visión, debemos remontarnos hasta Leibniz, quien, como en muchas otras ramas de la Filosofía, posee antecedentes de esta nueva dirección de la Lógica. Recordemos que la filosofía de Leibniz es eminentemente lógica, y que una de sus preocupaciones principales era conseguir un método universal de raciocinio que asegurase de modo definitivo la corrección de las inferencias; siendo Leibniz un matemático excepcional, percibió muy pronto que la ventaja que poseía esa ciencia, residía en la formalización de sus procedimientos, lo cual encontraba su mejor exponente en el Algebra que por entonces se le consideraba el análisis por excelencia, entonces ¿Cuál era la ventaja del Algebra? Pues la formalización por medio de símbolos y las operaciones que podíanse efectuar con ellos. La conclusión era evidente: había que efectuar una transformación en la Lógica que le permitiera operar como el Algebra, con lo que se conseguiría un método universal para todo el conocimiento, una "característica universal" como la llamó. De hecho encontraba Leibniz base para tal labor, pues veía equivalencia real entre el concepto, juicio y raciocinio con los símbolos, fórmulas y ecuaciones de la Matemática.

Esta algebrización de la Lógica permitiría realizar una operación de mucha importancia: reducir a la unidad la multiplicidad del mismo modo como el número se reduce a la unidad. El valor de este procedimiento radica en el hecho de la realidad tiene múltiples posibilidades que presentan una dificultad muy grande a la mente humana que no puede abarcarlas todas, pero si somos capaces de reducir esa multiplicidad de posibilidades a un esquema ideal, la dificultad desaparece ya que tenemos ante nosotros sólo unas cuantas relaciones formales; entonces es posible trabajar con éllas mediante un juego de leyes precisas. Se aprecia claramente la importancia de la tesis de Leibniz, que en última instancia, constituye el fin de todo conocimiento científico: reducir lo real a un esquema accequible a la limitada inteligencia humana; de otro lado tenemos que Leibniz ya anuncia la vinculación de la Lógica y la Matemática, vinculación que Russell reducirá a la identidad. La importancia del antecedente no precisa de mayor relieve; las líneas principales de la Logística Russelliana están ya presentes, y esta afirmación se refuerza con el hecho de que uno de los primeros libros de Russell se denomina "La Filosofía de Leibniz".

Breve tiempo después, la idea de la "característica universal" encontró un desarrollo bastante profundo en Salomón Maïmon [2]. Este lógico quiere también proporcionar a su ciencia los beneficios que el Algebra ha llevado a la Matemática, y parte de un principio fundamental para el trabajo con símbolos formales: que ellos pueden hacer progre-

[2] Salomón Maïmon nació en Neschwtiz, Polonia, en 1754. En el terreno filosófico, quiso superar la doctrina kantiana; se le considera un antecedente de Fihcte. Hizo investigaciones lógicas.

sar una ciencia, cuando en ella coincide la verdad material con la forma de las proposiciones como sucede en la Matemática. En el caso de la Lógica, esa circunstancia se produce en los juicios analíticos pues en éllos el predicado está ya contenido en la esencia del sujeto, lo cual permite una verdad puramente formal, siendo de notar además que este tipo de juicio es el verdadero juicio lógico; por estos motivos cabe emplear el símbolo en la Lógica introduciendo así el grado de certeza y la formalización que ello trae por consecuencia. Partiendo de estos supuestos Maïmon aplica los nuevos elementos a la Lógica, consiguiendo demostraciones puramente formales, como es el caso de la siguiente:

Queremos demostrar la figura "Bárbara" del silogismo. Representemos con "+" la afirmación; con "x", la universalidad, luego tenemos:

Todo "b" es "a": abx + a
Todo "c" es "b": abcx + abx
Todo "c" es "a": abcx + l.q.q.d.[a]

Se aprecia que el proceso lógico cada vez va tomando mayor similitud con las operaciones algébricas; pese a este aporte bastante notable, la lógica de Maïmon se limitó a las operaciones indicadas sin pretender llegar a la construcción de un sistema completo de lógica simbólica.

Ya en pleno S. XIX se produce en Inglaterra un interesante movimiento de reforma de la Lógica, que es antecedente directo de Russell. La atención de este estudio se fija cada vez con mayor insistencia en el aspecto extensional de la Lógica, pensando siempre en el tema del individuo y la clase a que pertenece; de aquí que se trabaje casi exclusivamente con conceptos universales, los que, vistos desde su aspecto extensional, traen el problema de precisar las relaciones con los individuos que los componen, pero no en forma analítica, es decir enumerando uno por uno, sino en forma sintética, mejor dicho, se busca un tratamiento global. Mas este tipo de trabajo supone procedimientos de la mayor generalidad posible, unidos a un cálculo total de relaciones; está demás decir que con la Lógica Clásica era imposible resolver esta cuestión, y por ello surge el empleo del simbolismo algébrico, junto con métodos de cálculo semejantes a los matemáticos.

[a] Este ejemplo está tomado de: *Leon Brunschvicg*, "Las etapas de la Filosofía Matemática", Lautaro, Buenos Aires, 1945. Traducción de Cora Ratto de Sadoski, Pág. 406.

Los primeros atisbos de esta innovación, los tenemos en Bentham y Hamilton, ambos ingleses, quienes se preocupan por la cuantificación del predicado, indicando que en el caso de que tenga igual extensión que el sujeto, el juicio se puede reducir a una ecuación de identidad ($S = P$), en cuyo caso el cálculo de relaciones a partir de proposiciones cuantificadas se simplifica de modo sorprendente.

El inglés Boole perfección aún más estas ideas, dándoles mayor universalidad y sistema. Comienza por introducir un simbolismo apropiado, mediante el cual es posible reemplazar al individuo por su clase, y facilitando el cálculo lógico en cuanto descripción de los elementos de las clases. Así emplea la multiplicación lógica, que equivale a la inclusión de elementos en la clase; la suma lógica, o conjunción de propiedades de una clase; la sustracción, o exclusión de propiedades o elementos de una clase dada. Con este material la lógica comienza a tomar las características de la Logística actual.

Este movimiento de renovación de la Lógica, fue aprovechado por los matemáticos para reeestructurar su ciencia. Tal propósito fue realizado empleando el símbolo para dar una mayor exactitud al lenguaje, y los métodos de cálculo para verificar las consecuencias de los principios matemáticos, fundamentando así, con toda estrictez, los teoremas y relaciones. El italiano Padoa representa esta dirección, la que fue concretada por él en la Aritmética principalmente, consiguiendo un juego de axiomas limitados al número de cinco, de los que se podía deducir toda la sucesión de los números naturales.

En intento paralelo al de Padoa, el alemán Frege empleó toda la Lógica Simbólica para fundamentar la Matemática, pero partiendo de un supuesto especial: que los principios matemáticos no son principios independientes sino iguales a los lógicos, y por esta razón toda la Matemática se puede deducir de la Lógica. Tal circunstancia resuelve de un golpe el problema del método que exige la Matemática para fundamentarse, pues siendo sus principios iguales a los lógicos, basta con el procedimiento puramente lógico. Esta tesis fue recogida por Russell, quien la pone como punto de partida a toda su Filosofía de la Matemática, e intenta el esfuerzo más grande y notable de verificarla en forma concreta al escribir su obra "Principia Matemathica" donde toda la ciencia matemática se estructura a base de principios y métodos lógicos; en base a esta circunstancia ha de sostener que Lógica y Matemática son una misma ciencia con nombres distintos.

Hemos concluído el relato de los hechos que van a converger en la formación del sistema lógico de Bertrand Russell. De querer caracterizar este movimiento, tenemos que fijar la mutua interrelación de la

Lógica y la Matemática, pues ambas intercambian elementos fundamentales para reconstituírse; así, la Matemática logra un método más adaptado a su naturaleza al crearse la Logística que emplea el símbolo y realiza cálculos, mientras que la Lógica descubre la posibilidad de un camino enteramente nuevo para su evolución.

Pero esa caracterización no agota el intercambio de elementos, ya que si los pormenorizamos, encontramos relaciones más profundas. Por este camino podemos indicar que el movimiento logicista se pronuncia por un rechazo de la intuición, ya que lo fundamental de su contenido reside en la prueba racional que aporta el cálculo y las conclusiones verificadas con criterios de verdad específicos; esta tendencia la recoge del problema planteado por las Geometrías No-Euclideanas, quienes han planteado el problema de la crisis de los postulados evidentes por sí mismos, desde que permitían la derivación de hipótesis contrarias a sus enunciados.

La fundamentación de la Matemática por medio de la Logística encuentra un punto de toda precisión al relacionar la Teoría de los Conjuntos con la Teoría de las Clases; ya indicamos que la Lógica se echaba por el camino del trabajo con clases, o conceptos puramente universales; esta actitud permitió dar una base metodológica a la citada teoría matemática que a su vez fundamentaba la Aritmética. Más esta relación no se detuvo aquí, pues como la aportación de los Conjuntos radicaba de modo especial en el trabajo de lo infinito, surgió el tratamiento lógico de aquel.

Para completar este movimiento, estaba la teoría matemática de las Funciones, la cual fue inmediatamente aplicada a las relaciones lógicas, esquematizándolas y consiguiendo un tratamiento puramente formal que permitió profundizar su estudio. De otro lado, contribuyó de modo efectivo al manejo de las clases lógicas, y por intermedio de éllas, de los conjuntos finitos o infinitos.

Tampoco podemos dejar de precisar la utilidad del empleo del símbolo, el cual permitía usar un lenguaje de mayor generalidad y con una exactitud que era desconocida a cualquier lenguaje anterior. Sin este recurso, exclusivamente matemático, poco hubiera progresado la Lógica que en su camino por alcanzar la precisión de sus procedimientos, tropezaba con las ambiguedades del habla común usada en la Lógica Clásica.

Resaltemos aún otro punto de importancia. Es el principio enunciado por Maïmon de que en las Matemáticas, la verdad material se confunde con la verdad formal; tal principio posibilitaba, en la lógica, la consecución de resultados correctos sin tener que ir al contacto directo con las cosas, evitando de este modo la complejidad que presentan. De este modo la verdad queda ligada al plano estrictamente formal, llegándose así a construir una Lógica pura en donde bastan sus propios procedimientos para probar la verdad o falsedad de sus operaciones; por este camino, la Lógica se independiza de la tutela de cualquier otra cencia y asegura una propiedad absoluta sobre su objeto particular.

Finalmente, el empleo del cálculo, al modo de las Matemáticas, trae la virtud de sintetizar procedimientos que de otro lado serían prolongadamente engorrosos; desde otro punto de vista, el cálculo permite una descripción de todos los elementos de una clase, lo cual responde a una de las necesidades que ha planteado el trabajo lógico del infinito.

Estas son las circunstancias históricas en que va a surgir la lógica russelliana; si queremos destacar de estas circunstancias los elementos típicos, podemos decir que en primer lugar la Lógica ha tomado el camino de la extensión. De las dos propiedades de los conceptos, comprensión y extensión, es la segunda la que predomina en forma exclusiva en el movimiento logístico, la otra propiedad será desarrollada por una escuela totalmente distinta como es la de Husserl, quien con la lógica fenomenológica intenta penetrar directamente en la *esencia* última del objeto lógico.

Otra de las circunstancias típicas de este movimiento, está en el acercamiento de la Lógica y la Matemática. Vimos como la Lógica se va "matematizando" por el empleo del cálculo, símbolos, ecuaciones, etc. Por otra parte, la Matemática aprovecha esta lógica reformada para encontrar las bases de sus fundamentos en crisis; como consecuencia de este acercamiento, que debemos precisar es principalmente metodológico, va tomando cuerpo la convicción de que ambas ciencias son equivalentes, como en el caso de Frege, que pensaba en una reconstrucción de las Matemáticas a partir de principios exclusivamente lógicos.

Para finalizar este capítulo, digamos que el movimiento logístico representa el primer esfuerzo científico de construír una lógica capaz de manejar el infinito, como se muestra en la teoría de las clases que se aplica a los conjuntos matemáticos.

Las características típicas que hemos señalado, van a repercutir profundamente en el sistema lógico de Russell, quien recogerá los problemas, intentará darles solución, y presentará aportes nuevos y personales.

CAPITULO II

EL SISTEMA LOGICO

El saldo dejado por la reseña histórica del capítulo anterior, puede señalarse en la necesidad de una fundamentación metodológica de las Matemáticas; en éllas había fallado el fundamento principal: la evidencia intuitiva de los primeros principios o axiomas, y la técnica deductiva de los sistemas clásicos, la cual había demostrado ser incapaz de englobar dentro de ellas a las nuevas ramas matemáticas. La necesidad de un nuevo método era evidente.

Esta necesidad arriba indicada, es sentida por Russell, quien construye su sistema lógico con fines a ser la solución esperada. En buena cuenta tal propósito supone una dirección especial de la Lógica, pues se orienta a conseguir un método auxiliar, olvidando la posibilidad de un estudio independiente del objeto lógico como por esa misma época lo piensa Husserl; con todo, el aporte de Russell será enorme para la Lógica, que aún por este camino se convierte en una ciencia independiente.

Para una cabal comprensión del sistema lógico que intenta Russell, es conveniente comenzar por exponer el concepto que tiene de la Lógica. Este varía bastante del tradicional, pues en su obra "Los principios de las Matemáticas" [1], en la que presenta por primera vez una exposición completa de sus ideas al respecto, le da una denominación nueva, acorde con el movimiento de renovación de la Lógica, afirmando que:

> "La Lógica Simbólica o Formal —usaré estos términos sinónimos— es el estudio de los diferentes tipos generales de deducción" [2].

---

[1] Russell, Bertrand: "Los Principios de las Matemáticas". Espasa-Calpe Argentina S.A. Buenos Aires, 1948. Tradición del inglés por Juan Carlos Grimberg.

[2] B.R.: "Los Principios de las Matemáticas". Ob. cit., pág. 37.

Aquí acentúa el empleo del símbolo, que va a permitir una máxima generalización de los procesos lógicos; también designa como equivalente el adjetivo formal, pues es intento de los logisticos hallar relaciones carentes de contenido concreto, para que así tengan un valor absolutamente universal, lo que también concuerda con el empleo del símbolo.

El punto importante de esta definición, reside en considerar la Lógica como una teoría de la deducción, llegando a sostener que tal es el único tipo de razonamiento al decir más tarde que: "Lo que se llama inducción me parece que es o deducción encubierta o un simple método para formular preguntas plausibles" [3]. Con esta afirmación Russell simplifica bastante el contenido de la Lógica, ya que excluye los demás razonamientos, tal vez por que su intento es reconstruír el fundamento de las Matemáticas, y el método fundamental de ellas es la deducción [4]. También el empleo exclusivo del método deductivo tiene ciertas ventajas, desde que permite la construcción de sistemas cerrados, donde toda consecuencia se desprende de unas cuantas proposiciones universales, y así el análisis lógico puede ir probando proposición por proposición sin dejar nada al azar o a la temida intuición.

Sin embargo de esta afirmación inicial, algún tiempo después Russell varía su concepto de Lógica. En su última obra de carácter estrictamente filosófico, declara:

> "La Lógica surge en el plano de mostrar la verdad y falsedad de una proposición mediante la relación sintáctica de dos sentencias, lo que permite que de una se deduzca la verdad o falsedad de la otra" [5].

La deducción ya no es el punto principal de la concepción lógica, sino la relación de verdad o falsedad; es cierto que aquí habla de deducción pero como elemento secundario, lo principal es determinar si el razonamiento es correcto. De otro lado se aprecia que ha introducido una noción nueva: la relación sintáctica; este punto es importante desde que Russell ha ido evolucionando en su concepción filosófica total, llegando en la actualidad a partir de un plano lingüístico para alcanzar la estructura de la realidad. Lo que más nos interesa de esta cita, reside en la ampliación del concepto de Lógica que en cierto modo vuelve a la for-

---

[3] B.R.: "Los Principios de las Matemáticas". Ob. cit. Cita de la pág. 38.

[4] Decimos el "método fundamental" por cuanto la Matemática emplea también la inducción, llegando algunos autores, como H. Poincare, a considerarla como la única capaz de dar carácter científico a esta rama del saber.

[5] B.R.: "Human Knowledge". George Allen and Unwin Ltd. London. 1948. First published.

ma clásica de Aristóteles, donde se consideraba como un método para pensar en función de la verdad o falsedad de las proposiciones, esto es, un medio para no equivocarnos.

¿Cuál es en definitiva el concepto de Lógica en Russell? Parece ser que tras estas dos especies de definición existe una noción subyacente, y es ella la idea de relación, la cual en verdad ha de llenar el contenido de su Lógica. Esta afirmación puede encontrar su punto de apoyo en la siguiente aclaración del autor:

> "Lo que la Lógica simbólica investiga son las reglas generales por la que se formulan las inferencias, y sólo requiere una clasificación de relaciones o proposiciones mientras éstas reglas generales introducen nociones particulares" [6].

Destaca la importancia de las relaciones, pues las reglas mismas de la inferencia no son otra cosa que un vínculo entre dos proposiciones. El clasificar las relaciones nos lleva a conocer la estructura del conocimiento, ya que, como veremos más adelante, en Russell el mundo se presenta al modo de percepciones individuales las que posibilitan generalizaciones, más para efectuarlas es preciso hallar las relaciones que unirían esos hechos individuales; la importancia de las relaciones es tal en este autor, que llegar a substancializarlas dándola el valor ontológico que Platón asignó a sus "ideas" [7]. De este modo una teoria de las relaciones es la única capaz de proporcionar inferencias correctas y llevarnos con seguridad hacia la verdad del conocimiento. En opinión de André Darbon, uno de los mejores criticos de Russell, este es el mayor aporte que ha conseguido, y si penetramos en el sistema del autor, veremos que este tipo de lógica, es *"la lógica"* de Russell, y quizá la clave de toda su filosofia. En consecuencia el concepto de lógica que Russell posee, es el de una teoría de las relaciones.

Este modo de apreciar la lógica, lleva a una cerrada construcción racional, desde que, el paso siguiente será rechazar el uso de la intucción.

El racionalismo que predomina, es una clara respuesta a la crisis de los postulados matemáticos (indicada en el capitulo anterior) producida al comprobarse que, pese a ser intuitivamente evidentes, las proposiciones contradictorias a éllos podían originar sistemas aplicables a la

[6] B.R.: "Los Principios de las Matemáticas", Ob. cit., pág. 38.

[7] Este punto de vista lo sostiene Russell en "Los problemas de la Filosofia". Editorial Labor. Barcelona, 1953. Traducción del inglés por Joaquin Xirau.

realidad como es el caso de la Geometría de Riemann y la Teoría de la Relatividad. Para evitar tal defecto, todo se entrega a la razón y ella funciona por medio de la Lógica; esta actitud Russell la sostiene como un nuevo fundamento matemático contrario al kantiano que había predominado en las últimas décadas de los siglos XVIII y XIX, donde aún se creía en el valor de la intuición:

> "Kant habiendo observado que los geómetras de su tiempo no podían demostrar sus teoremas únicamente por el razonamiento, sino recurriendo a la figura, inventó una teoría del razonamiento matemático según la cual la inferencia nunca es estrictamente lógica sino que siempre necesita el apoyo de lo que se llama intuición" [8]..

En otras palabras, cuando algun punto quedaba oscuro en el conocimiento se le probaba mediante una intuición, y así ella resultaba un parche para cubrir un escollo insalvable. Desde luego que esta intuición kantiana no es la tradicional, la que tal vez podría admitirse con algunas condiciones, pero Russell vio la falla de este recurso y procedió a eliminarlo, sosteniendo que "a nada excepto a la estricta lógica deductiva, se necesita en la matemática una vez que las premisas han sido establecidas" [9]. La consecuencia será una tendencia a demostrarlo todo, a no dejar ningún resquicio por el cual se infiltre la intuición; más este propósito, tan connatural al hombre, iba a tener un desmentido en el Teorema de Kurt Godel. Con todo, esta actitud nos muestra el deseo de obtener sistemas perfectos, donde la posibilidad de una demostración total sea una realidad efectiva.

Con lo antes expuesto, tenemos un esbozo del concepto de Lógica que posee Bertrand Russell; debemos ingresar ahora al terreno de su sistema lógico, mostrando al detalle, dentro de lo posible, los elementos y modo de operar, para luego estudiar su aplicación a las Matemáticas.

Dijimos anteriormente que todo el sistema se apoya en unos cuantos principios que toman el nombre de "indefinibles", ya que han de posibilitar la construcción del sistema sin que haya necesidad de preguntarse por su fundamento o por su definición. La primera de estas nociones es la de "implicación formal", y su importancia es enorme desde que servirá de fundamento a la teoría de la función proposicional, otro elemento de valor dentro del sistema y que posibilita los cálculos; la noción citada indica la existencia de una relación entre lo sostenido

---

[8] B.R.: "Introducción a la Filosofía Matemática". Editorial Losada. Buenos Aires, 1945. Traducción del inglés por Juan B. Molinari, pág. 205.

[9] B.R.: "Introducción a la Filosofía Matemática". Ob. cit., pág. 205.

en una afirmación y la consecuencia que de ella puede desprenderse; da la fórmula general válida para que efectivamente pueda producirse una inferencia en esas condiciones. Se expresa esta noción mediante la fórmula: *Si x es, entonces P,* lo cual traduce un juicio hipotético, donde de la verdad de la primera afirmación se desprende la verdad de la conclusión; el funcionamiento de la implicación formal dentro del sistema lógico se produce del modo siguiente: si queremos examinar la validez de un conjunto de conocimientos, nos referiremos primero a los principios, estos principios deben cumplir una serie de condiciones específicas [10]; verificado este punto, se pasa a comprobar, mediante el empleo de los tres cálculos russellianos, si la implicación formal funciona respecto de éllos. En general, este principio establece una relación entre las proposiciones científicas, relación que tiene la propiedad de poder formalizarse mediante el empleo de constantes y variables al igual que en la teoría de las funciones en Matemáticas; esta propiedad permite el análisis de las relaciones de proposiciones sin tener que descender a su contenido concreto.

Russell admite otros indefinibles, como son la implicación entre proposiciones que carecen de variables, esto es, cuando sus valores son fijos. También se considera indefinible, la *relación de un miembro con la clase a que pertenece,* punto de suma importancia desde que desembocara en el problema de las paradojas, las que según parece se generan por lo delicado de esta relación; esta circunstancia llevaria a una reconsideración de este indefinible. Otro elemento considerado como indefinible es la noción de *tal que,* la cual entra directamente a constituir las funciones proposicionales; este es otro tema que ha merecido discusión entre los entendidos, obligando también a ser reconsiderado. La noción de *relación* es considerada también como un indefinible, originando toda una teoría específica, donde surgen conceptos tan importantes como el campo de la relación, sus clases, todo lo que cobra importancia al entrarse en el cálculo de relaciones. Por último, la *verdad* es considerada un indefinible, aunque este punto en Russell sale algo del campo lógico, ya que el establecimiento de este concepto supone investigaciones lingüísticas, principalmente en el campo del significado; por ahora bástenos el considerarla como un valor que puede ser asumido por las proposiciones. Estos son los indefinibles básicos, sosteniendo Russell que "Por medio de ellos pueden establecerse todas las pro-

[10] Por ejemplo, las condiciones de la axiomática de Peano: compatibilidad, independencia y saturación.

posiciones de la lógica simbólica"; desde luego que esta afirmación es válida principalmente para la época en que fue formulada (1902), desde que las posteriores dificultades surgidas en la aplicación del sistema, obligaron a una revisión de los principios.

Junto a los indefinibles citados están los que podríamos llamar elementos del sistema, estando caracterizados por ser elementos fundamentales, ya no del sistema de Russell, sino de cualquier tipo de logística que posteriormente se haya desarrollado, por ejemplo, la teoría de las funciones proposicionales, pues por continuar con el desarrollo de estos temas o por intentar superarlos, se tiene que partir de allí. Nosotros los consideramos como la base para comprender las ideas lógicas y matemáticas del autor, pues ellas permiten armar la estructura del sistema y, lo que es más, ayudan en la aplicación del mismo. Estos principios secundarios podemos señalarlos en las *clases de símbolo empleados, la teoría de la función proposicional, la teoría de las clases,* que es la parte de mayor contenido filosófico, *la teoría de la denotación,* emparentada con la anterior, y por último, la *clasificación y contenido de las relaciones.* Comenzaremos por el símbolo.

Russell ha llegado a definir la Logística como "Lógica Simbólica", aunque precisando que la "palabra *simbólica* designa al sujeto por una característica accidental" [11], desde que tal uso es por simple comodidad de trabajo. Pese a esta afirmación un tanto peyorativa, el símbolo ocupa en el sistema de Russell un lugar bastante importante, desempeñando funciones diversas. ¿Por qué la necesidad del símbolo? Russell la indica en un breve pasaje:

> "Debido a que el lenguaje es engañoso, difuso e inexacto cuando se aplica a la lógica (para lo cual nunca estuvo destinado), el simbolismo lógico es absolutamente necesario para el examen exacto o completo de nuestro tema" [12].

La Lógica, como todas las ciencias particulares, conforme ha ido creciendo en contenido cada vez se va apartando del lenguaje común, puesto que él se revela inadecuado, de aquí que sea necesario un lenguaje específico; este es el papel del simbolismo: el lenguaje propio de la nueva lógica. Las razones son obvias, con el símbolo se evitan las ambigüedades tradicionales de las palabras, baste para ello recordar que muchas paradojas lógicas como las célebres de Aquiles y la tortuga y aquella de la Flecha en movimiento, se consideran tales por el vario

[11] B.R.: "Los Principios de las Matemáticas". Ob. cit., pág. 37.
[12] B.R.: "Introducción a la Filosofía Matemática". Ob. cit., pág. 285.

sentido que pueden tener las expresiones lingüísticas; con el símbolo, cada objeto es representado en forma única por un signo y de este modo no cabe lugar a equívocos.

Pero la indicada no es la única ventaja del simbolismo, pues parece que este elemento tiene la virtud especial de esquematizar un sector de conocimientos, llevándonos así a la mejor comprensión de su estructura total. Cuando cada objeto de un conocimiento científico está formalizado en un símbolo único, es posible establecer con toda claridad las relaciones que pueda poseer con los demás, lo cual proporciona una visión sintética del contexto total, y por este camino se llega a consolidar o corregir la estructura base de este conocimiento. Esta virtud ha sido tan clara, que en la Escuela de Viena la nueva lógica ha desembocado en una teoría del lenguaje, que trata por este medio de hallar las propiedades ineludibles de cumplir a cualquier conocimiento científico.

Como los símbolos descubren la estructura del conocimiento científico, Russell halló la Lógica Simbólica especialmente apta para la reconstrucción de las Matemáticas; esta es una de las razones principales por las que desarrolla su sistema, y, sobretodo, por la que llega a su espectacular tesis de que toda la ciencia matemática puede ser derivada de postulados exclusivamente lógicos, tesis que rompe con toda la tradición clásica al respecto.

En este punto conviene hacer algunas aclaraciones, pues como la Lógica Clásica [13], empleó cierta clase de simbolismo, cabría pensar en la supervaloración de la nueva lógica, por lo menos en este aspecto. Es cierto el uso del simbolismo por la Lógica Clásica, en especial en la teoría de la proposición, (recordemos el "cuadro de Boecio") y en las figuras y modos del silogismo; más a poco que se analice esta clase de simbolismo, se comprobará su diferencia con el actual, y, lo que es más, su insuficiencia para llenar los nuevos propósitos de la Logística. En efecto, el campo del antiguo simbolismo era sumamente reducido desde que sólo hacía referencia a cuatro tipos de proposición, siendo aquellas las que provenían de combinar la calidad y cantidad de los juicios; en cuanto al simbolismo empleado es la técnica del silogismo, se limitaba a señalar la posición del término medio, originando así las fi-

[13] Entiendo por tal lógica, aquella que dominó el pensamiento de la Baja Edad Media, con la cual se creía haber descubierto el instrumento dialéctico definitivo. Es contra esta lógica que reaccionan Bacon, Galileo y, en general, toda la Edad Moderna.

guras del silogismo, y a determinar cuáles eran los modos válidos del mismo, en lo cual evidentemente tenemos un cierto antecedente logístico pues mediante un cálculo basado en la cantidad y cualidad de las premisas (cuyo simbolismo era idéntico al de las proposiciones) se llegaba a los citados modos válidos. En consecuencia, el simbolismo usado por la Lógica Clásica resultaba completamente estrecho por cuanto dejaba de simbolizar muchos elementos lógicos tales como las operaciones del raciocinio, ni se ocupaba de esquematizar la relación de pre misa a consecuencia como hoy lo hace la implicación formal; de otro lado, tampoco había reparado en la necesidad del cálculo lógico aunque el citado procedimiento en la consecución de los modos válidos del silogismo haya sido un antecedente, pero él no servía en absoluto para cálculos más complicados como el de clases o relaciones, además de que con sólo esos pocos símbolos era imposible hacer más de lo ya logrado. Por estas razones, el simbolismo clásico carecía de la suficiente capacidad de formalización, sus condiciones de manejabilidad eran limitadas, y los elementos que presentaban eran, numéricamente, muy pocos para las nuevas necesidades, de aquí que se pensó con justa razón que ya había agotado sus posibilidades. El remedio a esta situación era adoptar una nueva clase de simbolismo que, apartándose del tradicional y acercándose al empleado por las Ciencias Matemáticas, pudiera responder a las exigencias recién planteadas.

Aunque hemos visto que entre el simbolismo clásico y el logístico hay una diferencia absoluta, cabe hacerse la pregunta de qué relación cabría entre los dos. En este sentido podemos afirmar que el nuevo simbolismo no es una negación del antiguo ni importa su introducción en la lógica, un cambio radical en esta ciencia, antes bien, él constituye un antecedente, aunque de verdad un antecedente muy modesto: sólo señaló la posibilidad de emplear en la Lógica el símbolo, que éste era más bien una ayuda y no una dificultad; la Logística no niega el simbolismo clásico, que cumplió una función, modesta desde luego, dentro de la Lógica Clásica. Desde luego que esta aclaración no pasa de ser tal, y está lejos de indicar una continuidad entre los dos tipos de simbolismo, pues los logísticos rara vez hacen alusión al clásico, siempre parten de una situación nueva, más desde un punto de vista sistemático cabe efectuar la indicación anterior.

Volviendo al simbolismo actual, ¿qué funciones tiene dentro del logicismo de Russell? La función general ya ha sido expuesta: precisar el lenguaje lógico, darle mayor operabilidad y esquematizar la estructura del sistema; en cuanto a las funciones específicas, o sea el empleo concreto de los símbolos, podemos decir que se realiza en cuatro formas distintas. La primera reside en la *"constante"*, cuyo símbolo representaba un valor fijo, que puede ser una clase, una definición, y que por lo general es el punto de partida de cualquier relación u operación lógica. La segunda forma la tenemos en la *"variable"*, que indica las posibilidades de verdad o individuación de un elemento, por lo que siempre va unida a una constante; el valor de esta clase de símbolos no es fijo, como fácilmente podemos suponer, sino diverso y siempre representa una incógnita; debemos indicar que en este punto hablamos del símbolo que representa una variable, ya que ella de por sí es un elemento lógico de mucha importancia, y que merece estudio aparte. La tercera forma que tienen los símbolos en este sistema está dada por la representación de relaciones, que pueden ser *implicaciones formales*, y las *operaciones lógicas*. La última forma la tenemos en la representación de funciones es decir cuando los símbolos se refieren a ciertos elementos que han de completar a los anteriores en el trabajo general de análisis lógico; son, por ejemplo, los cuantificadores que señalan la extensión del predicado, las funciones proposicionales, etc. Cuando estas cuatro formas simbólicas se ordenan en una estructura superior, resulta un sistema de conocimiento perfectamente fundamentado y, sobre todo, demostrado.

Hemos de indicar, que al referirnos a los símbolos usados por Russell, lo hicimos en forma general, buscando agrupar los signos individuales en grupos más universales; esto porque una enumeración pormenorizada de todos los símbolos llevaría un capítulo entero, saliendo ya de los límites de un trabajo de investigación, para llegar a los de una presentación de material de trabajo, es decir, sería la introducción a una labor logística, lo que, además de efectuar una enumeración pormenorizada, nos obligaría a repetir literalmente la exposición que al respecto se hace en "Principia Mathematica", la obra donde Russell trata de confirmar prácticamente sus teorías.

Examinemos ahora la teoría de la función proposicional. Esta teoría constituye el núcleo fundamental del sistema de Russell, ya que, como vamos a verlo a continuación, posibilita la estructura de la deducción, da ciertas correcciones a la Lógica Clásica y, finalmente, también presenta dificultades para la validez del sistema. Para una comprensión clara del tema, resulta indispensable comenzar por una breve reseña del concepto russelliano de *proposición*, el cual es la base de las funciones proposicionales.

Russell considera como elemento lógico fundamental la proposición; aquí cabría pedir alguna aclaración, pues este término ha sido uno de los pilares de la Lógica Clásica, y en la Lógica Fenomenológica contemporánea se le considera un punto ya superado por las implicaciones lingüísticas que posee; en la actualidad la proposición se entiende como la "expresión oral del juicio", lo que tiene ya una connotación lingüística, y para evitarla se habla del juicio. ¿Cuál de estos conceptos tiene Russell acerca de la proposición?. En verdad es un punto bastante oscuro, pues el autor habla de juicio y de proposición, pero si se analiza con detenimiento la noción de juicio, por ejemplo en "Los problemas de la Filosofía" y en "Human Knowledge", se descubre que es un concepto gnosealógico más que lógico, desde que diferencia el juicio de la simple creencia, y al referirse al valor veritacional del primero, dice:

> "Ahora estamos en disposición de entender lo que distingue un juicio verdadero de uno falso... En todo acto de juicio hay un espíritu que juzga y los términos sobre los cuáles juzga. Denominaremos al espíritu *sujeto*, y a los términos los *objetos* del juicio" [14].

Sin duda alguna esta concepción del juicio no corresponde a las teorías modernas ni a las clásicas, porque en verdad incluye dentro de él ciertos elementos extralógicos y que ya caen dentro del defecto que Russel combatió bajo la denominación de "psicologismo"; entonces sólo cabe pensar que esta noción de juicio es más que nada gnoseológica, desde que ya está planteando una relación de entendimiento y cosa externa, exactamente la relación sujeto-objeto que es propia del terreno de la Teoría del Conocimiento.

Descartada así la noción de juicio, y ello para evitar una posible confusión de conceptos con la proposición, veamos que significado tiene esta última. En primer lugar, no puede pensarse que va a reemplazar el concepto tradicional de juicio, pues cuando Russell se refiere a ella, la determina diciendo:

> "En primer lugar, entendemos por "proposición" un conjunto de palabras que expresan la verdad o el error" [15].

De aquí que la esencia de la proposición sea la posibilidad de verdad o error, a diferencia del juicio cuya particularidad consistía en la enunciación. Este valor tan especial, proviene de que la proposición es la "figura de un hecho", algo así como su representación, y que mantiene con él una estructura, siendo por lo tanto evidente las posibilidades de error o verdad. Cabe recordar aquí, que en toda la Filosofía de

---

[14] B.R.: "Los problemas de la Filosofía". Ob. cit., pág. 148.
[15] B.R.: "Introducción a la Filosofía Matemática". Ob. cit., pág. 219.

Russell el punto de partida del conocimiento está dado por los hechos empíricos, los que tendrán representación en el plano lógico por las estructuras que constituya la mente, las que una vez construidas pueden desarrollar un trabajo puramente apriorístico, adquiriendo valores propios.

La proposición tiene, además de las características indicadas, la propiedad de establecer una relación entre algunos términos, lo que se aprecia en los elementos que posee, como son el sujeto, el predicado y el verbo. Aquí surge un distingo con la teoría tradicional, pues sostiene Russell que ella consideraba la proposición como una relación entre dos términos (sujeto y predicado), mas es el caso de que esos términos de la relación pueden ser muchos, tal sería cuando el sujeto es una clase (o sea un sujeto plural) o cuando la extensión del predicado incluye muchos casos partculares; esta propiedad de las proposiciones permite el empleo de la Lógica Simbólica, lo que se realiza del modo siguiente: si los términos son varios, cada uno de éllos (sujeto y predicado) pueden ser reemplazados por variables, y la relación que existe entre éllos por una constante, entonces la fórmula clásica "S es P", cambiaría por la que sigue "XRX", y volcando esta en los moldes de la Lógica Simbólica permite operar con toda precisión, pues en el caso de que "X" sea una clase plural, no hay necesidad de descender hasta la determinación de cada uno de sus elementos para precisar sus propiedades o valores de verdad y relaciones que pueda poseer, lo que no sucedería si se siguiera en la creencia de que una proposición sólo tiene dos términos fijos.

Con lo expuesto sobre la proposición podemos decir algo acerca de las funciones proposicionales. Este elemento lógico está tomado por analogía de las funciones matemáticas como sostiene con todo acierto Black [16], puesto que ellas tienen la facultad de vincular una variable y una constante: en el campo lógico, las funciones proposicionales indican la existencia de una relación entre dos proposiciones, de modo que las proposiciones toman el lugar de las variables y la relación entre ellas el de la constante, esta relación no es otra que la implicación formal, lo que evidencia que la importancia de este elemento lógico está en el campo de la deducción; aclaremos este punto con un ejemplo; supongamos dos proposiciones: "Socrátes es hombre implica Sócrates es mortal", tenemos aquí dos proposiciones vinculadas por una relación: que de la primera se puede concluir la segunda, la función proposicional reducirá a una

[16] Max Black: "The Nature of Mathematics", Routledge & Kegan Paul. London, 1953.

relación funcional el vínculo entre ambas; la Lógica Simbólica reduce esta función a una fórmula: F(x)-Y(x), que significa que de la proposición en Sócrates tiene una relación determinada (ser hombre) se deduce otra proposición sobre él, la que sostiene que es mortal.

En la exposición anterior quizá ha quedado una pregunta por hacer: ¿Qué valor puede tener este procedimiento? Es evidente que en el ejemplo el valor no está muy claro, pero digamos que se aprecia perfectamente cuando la variable "x" no tiene por valor un sólo individuo sino una clase. Esta circunstancia se presenta cuando el sujeto de la proposición es un sujeto plural o universal, como sería el caso de la expresión "cualquier hombre es mortal"; entonces si cobra utilidad el uso de la función proposicional pues permite, primero, establecer una relación entre dos clases (este es el nombre técnico de las frases plurales), y segundo, llega a determinar cual de los miembros de la clase es el que satisface esta función. Pasando al campo de las Matemáticas, vemos que si utilizamos este elemento lógico, se podrá establecer las vinculaciones posibles entre dos grupos de entes, sin necesidad de concretarlos o individualizarlos, (esto funcionaría, por ejemplo, cuando se afirma que la propiedad indicada en un postulado la posee un grupo de entes matemáticos), si por los procedimientos lógicos se determina que la vinculación es exacta, se puede posteriomente precisar cuál de los individuos de la clase posee la propiedad deducida.

Hemos hablado anteriormente de las funciones proposicionales cuyos valores son clases, lo que obliga al empleo de variables. Esta circunstancia lleva a la necesidad de encontrar un medio que permita concretar el valor de la variable; este medio son los cuantificadores, que son cierto grupo de símbolos que luego de algunas operaciones indican la existencia de un elemento que satisface la propiedad anunciada en la función proposicional, con lo que se considera definida y explicitada la función proposicional. Pese a lo dicho, existen funciones proposicionales que no presentan el problema de definirse o concretarse, lo cual ocurre cuando sus variables tienen un sólo valor, como sería el caso de una clase con un sólo término, resultando evidente que el valor de la función proposicional es sólo uno, entonces la aserción está perfectamente definida, y en verdad no se presentan mayores problemas de trabajo.

Las funciones proposicionales no tienen significado por el simple hecho de ser tales, para poseerlo deben ser verdaderas o falsas. Esta propiedad está en relación directa con la implicación que expresan y la existencia de algún valor de la variable que verifique en sí la afirmación, lo cual quiere decir que si la función proposicional se refiere a clases, debe existir por lo menos un elemento de la clase que satisfaga la propiedad. El llegar a determinar estos valores veritacionales, nos lleva a la teoría de los tipos, una de las partes más interesantes de la lógica russelliana y también una de las más atacadas, la que veremos más adelante.

Si dijimos que las funciones proposicionales eran la parte más importante del sistema que estudiamos, también debemos decir que presenta en su aplicación una de las dificultades de mayor calibre para sostener la validez del sistema. Dijimos que las funciones proposicionales podían referirse a clases, las cuales indicaban una multitud de elementos, ahora bien, junto a esta referencia también se afirma una implicación o sea, la adjudicación de una relación o propiedad, pero es el caso que la implicación resulta difícil de sostener cuando existen variables, especialmente si una de las proposiciones es una frase descriptiva, esto es, que atienda más a la extensión de sus componentes y no a la comprensión de todos ellos, todo esto exige una enumeración precisa de cada miembro, de aquí el problema de preguntarse: ¿La propiedad predicada del todo conviene por completo a cada una de sus partes? La respuesta no se puede tener hasta haber cuantificado cada variable, pero ello supondría un trabajo anterior a la aplicación del método de las funciones proposicionales y comenzar a trabajar con proposiciones ya analizadas, lo cual va contra la esencia misma del método que pretende resolver la implicación sin necesidad de individualizar los componentes de las clases. Desde luego que Russell intentó solucionar la dificultad, pues fue el primero en descubrirla y para ello empleó dos recursos: el axioma de la reducibilidad y la definición "in use"; veamos su planteamiento de la cuestión. La necesidad de individualizar a los componentes de la clase reside en que empleamos símbolos en vez de conceptos, por eso cuando tenemos una proposición simbolizada es difícil saber si el predicado conviene al sujeto (es decir a sus elementos desde que es una clase) y por ello la implicación de otra proposición resulta improbable o por lo menos confusa; esto lleva a emplear el citado axioma, que sostiene que dos cosas que poseen iguales propiedades pueden tener igual nombre, entonces, si por la implicación vemos que dos variables tienen iguales propiedades es porque son iguales, y así no necesitamos descender hasta la individualización de los componentes. De otro lado, la dificultad surge por el empleo de símbolos cuyo significado (valor) está por conocerse, esto nos obligaría a definirlos previamente, mas cabe un medio de definición sin que ella preceda al trabajo con los símbolos: la definición "in use", que define al símbolo por su constante empleo en una misma forma durante todo el trabajo de análisis. Pese al esfuerzo de Russell, parece ser que las dificultades quedaron en pie; posteriormente uno de sus discípulos, Ramsey, intentó mejorar la teoría; el resultado ha sido discutido sin llegarse a una conclusión definitiva.

Las dificultades antes anotadas, llevaron a Russell a considerar la función proposicional como uno de los indefinibles lógicos, queriendo indicar así que todo intento de analizar este elemento lógico conduciría a contradicciones. Ya en "Los Principios de las Matemáticas" publicado como sabemos en 1902, sostenía que esta teoría no estaba exenta de tropiezos, pero que para los fines metodológicos de sus sistemas presentaba menores inconvenientes que cualquier otro procedimiento. Pese a estas deficiencias las funciones proposicionales se han incorporado al cuerpo de la Logística, como lo demuestra la lectura de cualquier manual de introducción a esta ciencia, así bástenos citar la "Introducción a la lógica y la metodología de las ciencias deductivas" de Alfred Tarski, publicado en 1940 [17], donde ellas, desde luego con algunas modificaciones, siguen teniendo un lugar preponderante.

Para poner punto final a este punto, digamos que Russell siempre tuvo una precaución al hablar de funciones proposicionales: la de no confundirla con la forma de la proposición. Esta última se refiere al valor de verdad o falsedad que tiene la enunciación de la proposición; en cambio la función proposicional significa una relación entre dos proposiciones. La aclaración tiene importancia, desde que muchos intérpretes de Russell confundieron estos elementos, y por ello llegaron a formular críticas que iban orientadas a destruir el sistema.

Pasemos ahora a exponer uno de los puntos más discutidos de toda la teoría de Russell, y que al mismo tiempo constituye la base de la mayor parte de su método lógico: la teoría de las clases. Esta teoría posee un doble aspecto: lógico y ontológico, siendo este último el fundamento del primero, mas como hemos pensado exponer en capítulo aparte los supuestos filosóficos del sistema en estudio, por ahora nos vamos a limitar al aspecto lógico, haciendo desde luego, las referencias necesarias a la parte ontológica, con el fin de una mayor claridad en la exposición.

En el capítulo anterior hicimos referencia al surgimiento de los números infinitos en base a la Teoría de los Conjuntos enunciada por Jorge Cantor. Este nuevo elemento matemático trajo consigo dificultades graves, pues se llegaba a definir el conjunto infinito como aquel que era

---

[17] A. Tarski: "Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas". Editorial Espasa Calpe, Buenos Aires, 1951. La edición que citamos en el texto corresponde al original polaco; en el trabajo hemos empleado la edición castellana, en la traducción de Bachiller y Fuentes.

coordinable consigo mismo, lo cual suponia la afirmación de que la parte era igual al todo [18]; de otro lado, esta teoría presentaba la ventaja de resolver ciertos problemas, como el conseguir que dos números diferentes no tuvieran igual sucesivo, lo que si ocurría en los conjuntos finitos pues ese sucesivo era el límite. Estaba claro que los conjuntos, para poder ser incorporados a la matemática y asi resolver ciertos problemas ya tradicionales, requerian un tratamiento lógico, mas la Lógica tradicional no estaba en condiciones de resolver el problema; Russell emprende, siguiendo las huellas de Frege, la tarea de alcanzar la solución; nace de este modo la teoria de las clases.

Vémos entonces que las clases suponen la existencia de conjuntos infinitos, mas aquí surgen las actitudes curiosas. Russell en la época que escribe: "Los Principios de las Matemáticas" creia firmemente en la existencia de tales entidades, llegando en el terreno ontológico a substancializarlas como puede apreciarse en "Los problemas de la Filosofía" editada en época contemporánea de la obra antes indicada. Mas al escribir su "Introducción a la Filosofía Matemática" (1919) ya duda de que existan los conjuntos infinitos:

> "No se puede decir con *seguridad* que haya en el mundo conjuntos infinitos. Suponer que existan es admitir lo que llamaremos el "axioma del infinito" [19].

Resalta la prevención con que inicia el estudio de este tema, mas llega a admitirlo por cuanto:

> "Al mismo tiempo, no hay ninguna razón lógica *contra* la existencia de los conjuntos infinitos, y por esto estamos autorizados lógicamente a investigar la hipótesis de la existencia de tales conjuntos" [20].

La duda que muestra Russell respecto de estos conjuntos, se vió confirmada en el año 1935, cuando en Paris se realizó el Congreso Internacional de Filosofia Cientifica, donde el matemático Padoa puso en tela de juicio la existencia de los números infinitos (expresión matemá-

---

[18] Un ejemplo lo tenemos en la serie de los números naturales: si de ella extraemos los números impares, tendremos una parte de la serie, pero que puede coordinarse en relación de uno a uno con el todo que sería la serie completa, por esta razón la parte resulta igual al todo.

[19] B.R.: Obra citada, pág. 115.

[20] B.R.: "Introducción a la Filosofía Matemática". Ob. cit., pág. 115.

tica de los conjuntos de esta clase) por cuanto no poseemos una verdadera teoría deductiva de los números, y por ello cabe la inclusión de nuevas clases de números sin discriminación alguna. Mas pese a las evidentes dificultades de esta teoría, queda en claro un punto favorable: que, lógicamente, no existe ninguna dificultad en admitirlo, ya que, como lo dice el mismo autor, puede ser estudiada al modo de una hipótesis de trabajo. Este punto es de capital importancia, ya que nos lleva a considerar la naturaleza de la existencia lógica, puesto que si una teoría no tiene ningún inconveniente en este plano, ella puede ser trabajada sin preocupación alguna; al respecto, cabe indicar que la opinión general sobre la existencia lógica se refiere a la falta de contradicción, es decir, la vigencia del principio lógico correspondiente. Cuando Russell escribía lo citado, consideraba que la teoría de los conjuntos llenaba el requisito lógico, pues pese a las paradojas que se habían presentado al llevar la teoría hasta sus últimos extremos, podría evitarse la contradicción mediante el empleo de la jerarquía de los tipos lógicos, otro método por él descubierto; en consecuencia, desde el plano lógico podía desarrollarse perfectamente la teoría, mas si queríamos descender al plano real, ellà pasaba a ser una hipótesis de trabajo de bastante utilidd, en el peor de los casos no había, y aún hoy en día no hay, otra explicación mejor de estos problemas matemáticos.

Partiendo del supuesto anterior, Russell acomete la empresa de dar un tratamiento lógico al conjunto infinito. La base de la teoría presente, la constituye la existencia de pluralidades de objetos, los cuales pueden formar en su conjunto un todo capaz de ser denotado por un concepto. La expresión de las clases la encuentra en las frases plurales como lo declara a continuación:

> "La doctrina fundamental sobre la cual descansa todo, es la doctrina de que el sujeto de una proposición puede ser plural y que tales sujetos plurales son los que se entiende por clases que tienen más de un término" [21].

El significado de las clases está claro. Cuando este concepto se aplica a las Matemáticas, cada clase indica un número, y por esta razón sirve para darle un fundamento; de otro lado ya permite el manejo del infinito, desde que reduce a un todo los innumerables elementos individuales, este proceso resulta una síntesis por reducción a la unidad. La clase posee propiedades diferentes de las que ostentan sus componentes, pudiendo decirse que son ya una realidad distinta, sin embargo se plantea un problema: cuando hacemos predicaciones del todo, no

---

[21] B.R.: "Los principios de las Matemáticas". Ob. cit., pág. 630.

siempre basta con que la propiedad afirmada le convenga al todo, sino que muchas veces es preciso demostrar que la propiedad conviene a todos y cada uno de los elementos, es este el caso de las frases descriptivas, las cuales constituyen uno de los puntos álgidos de esta teoria, influyendo no sólo en ella, sino, como ya vimos, en la teoria de las funciones proposicionales.

Expresado ya el concepto de clase, veamos cuando se puede afirmar que "existe" una de ellas. Desde luego que, como indicamos al comienzo, la existencia de las clases es más una hipótesis de trabajo que una realidad, mas cabe hablar de "existencia" en un sentido puramente operativo, es decir, con miras a determinar los casos en que podemos trabajar con una de ellas; en este sentido Russell señala como criterio de existencia el que la clase posea por lo menos un término, de no ser así, tendríamos clases que no son tales pues no serían todos o conjuntos, pese a lo dicho, es de indicar que este criterio sufre luego algunas alteraciones al tener que admitirse la llamada "clase nula" que no posee ningún término, mas aqui ella desempeña el mismo papel que el cero en la Aritmética, es más un recurso metodológico que una realidad, sin ella no serían posibles ciertas operaciones del cálculo de las clases.

Dentro de las proposiciones, las clases se reconocen por el empleo del artículo en plural "las" o "los", y ello está indicando la existencia de una infinidad de términos pues estos artículos no determinan número exacto alguno. También la palabra "cualquiera" tiene el mismo significado, con la peculiaridad de hacer una referencia aún más universal que otras palabras parecidas como por ejemplo "todos". Esta noción de clase infinita nos lleva a preguntarnos cual será el criterio para afirmar que una clase efectivamente lo es; el criterio es exactamente el mismo que el empleado en los conjuntos, o sea que tendremos una clase infinita cuando es coordinable consigo misma, de tal modo que una de sus partes sea igual al todo; por cierto que tal condición es posible por trabajar con grupos de elementos que no están determinados y por ello caracen de límite, por esto es factible agregar siempre un elemento más.

Para precisar en mayor grado el signiicado de la noción de clase, indiquemos que en ella pueden distinguirse hasta tres elementos diferentes: primero, la pluralidad, que forman los componentes; segundo, la clase en sí misma, considerada como todo independiente de sus partes, o sea como un elemento único, y por último el concepto clase, que hace referencia a los componentes de la clase, lo cual lleva al terreno de la "denotación" que explicaremos acto seguido. Esta triple distinción no es un exceso de sutileza, pues ella tiene un valor muy especial para las operaciones con clases, desde que es preciso reducirlas a símbolos y entonces, para evitar confusiones de sentido, se hace necesario referirse en concreto a cada aspecto.

Digamos ahora algunas palabras acerca de una clasificación de las clases. Ya dijimos anteriormente que existen dos tipos de clases, las finitas y las infinitas, siendo estas últimas las que permiten un tratamiento lógico del infinito, cosa que hasta la aparición de la nueva lógica parecía imposible. Junto a esta primera clasificación, podemos citar otra, cuya importancia repercute en el aparato lógico que es necesario construir para trabajar con estos elementos; esta clasificación considera tres tipos de clases: la clase corriente, la clase de un sólo término, y la clase nula. La primera de las mencionadas es la que hemos expuesto al hablar en general de las clases: la que incluye una pluralidad de individuos, pudiendo ser finita o infinita; la segunda, a primera vista, parece una contradicción, pues si hemos indicado que la clase se caracteriza por significar una pluralidad, hablar de clase de un sólo término resulta extravagante; para poder comprender con claridad este punto, tenemos que retroceder hasta la definición de clase; según lo anteriormente expuesto, podría pensarse que el significado de la clase es puramente extensional, mas como lo sostiene Russell:

> "Pero en realidad hay posiciones intermedias entre la intensión y extensión puras, y es en ellas donde la Lógica Simbólica tiene sus lares" [22].

Lo cual significa claramente que en la teoría de las clases se debe considerar el aspecto intensivo (de la comprensión), de donde resulta que las clases, si bien hacen referencia a una pluralidad de objetos, esa referencia no es fundamental sino el hecho de tener un contenido; es claro por consiguiente, que la clase no tiene relación alguna con objetos físicos, sino con algo especial, que podría identificarse con los objetos ideales que Russell afirma son el substratum lógico; es evidente que el aspecto extensional de las clases es secundario aunque tenga que ser mencionado para una mejor comprensión de este elemento lógico tan complejo. Entonces, para aclarar la idea de clase, tenemos que referirnos más que nada a la función que desempeña y menos a su definición; esta función está determinada por el referirse a un objeto, y por medio de esta referencia, posibilitar un tratamiento simbó-

[22] B. R.: "Los Principios de las Matemáticas". Ob. cit.

lico de él, por este camino podemos ya comprender que exista una clase con un sólo término: existen objetos, o quizá digamos mejor conceptos, que pueden ser considerados como individuales aunque hagan alusión a una pluralidad, tal es el caso del concepto "la sociedad", el cual comprende dentro de sí a una multiplicidad de seres, más considerado en su propia realidad es un concepto individual; en el caso de las clases, existirán unas que hacen referencia a pluralidades en sentido estricto, como por ejemplo "todos los hombres", pero también pueden hacer referencia a conceptos del tipo de "la sociedad", de aquí que se pueda hablar de clases de un sólo término, cuando el concepto a que hace referencia la clase es un concepto de ese tipo. La existencia de este tipo de clase está condicionada por las necesidades de operabilidad lógica, pues en este campo desempeña el papel de unidad.

Si la clase de un sólo término plantea una situación desconcertante, la clase nula agrava la situación, pues ella significa una clase que *no tiene términos o elementos*, es decir, es una clase vacia. En verdad no puede decirse con seguridad que esta sea una clase auténtica, desde que carece de términos a quien referirse, en verdad es un recurso lógico para resolver situaciones como la siguiente: dijimos que la función de una clase consiste en referirse a un concepto; dentro del sistema lógico, el concepto puede indicar expresiones tales como "x es un a" (no olvidemos el paralelo hecho con el objeto ideal), mas como esta expresión es capaz de sufrir los valores de verdad y falsedad, puede darse el caso de que sea falsa y entonces la clase hace referencia a una realidad que no existe. Desde este punto de vista se habla de clase nula: aquella que se refiere a un concepto que denota una proposición falsa; esta circunstancia es importante dentro del sistema lógico que estudiamos, pues si al hacer el análisis de una ciencia descubrimos proposiciones falsas, dentro de los procesos de cálculo lógico tendremos que incluirlas, mas para una exactitud del procedimiento es indispensable designarlas con algún elemento, y entonces el valor de la clase nula resulta claro; en fin de cuentas, *es un mero recurso lógico*.

Esta enumeración de las clases que hemos expuesto, tiene el valor de permitir su simbolización, lo cual facilita el tratamiento logístico. Hecha la simbolización, el modo lógico de trabajar con ellas es reducirlas a las funciones proposicionales las cuales, como ya lo indicamos, pueden indicar relaciones entre proposiciones cuyos sujetos sean plurales, este tipo de proposiciones equivale a enunciados sobre clases, y así al emplear las funciones proposicionales resulta factible trabajar con estos elementos que llegan a ser infinitos. De aquí nace la posibilidad de establecer las relaciones entre un término y su clase, y las relaciones de la clase consigo misma (caso de la clase infinita en la que es posible coordinar una parte de ella con toda la clase); mas si este tratamiento de las clases permite ciertas operaciones lógicas, también presenta algunos problemas, en especial con las clases infinitas, como es el caso de las relaciones de la clase consigo misma, la que trae la célebre dificultad lógica denominada "paradoja", donde resulta imposible determinar si la proposición obtenida es verdadera o falsa, dificultad que posteriormente llevó al nacimiento de las lógicas trivalentes, llamadas así por negar validez al principio de tercio excluído, desde que surgía la proposición indefinida.

En estrecha relación con el tema de las clases, está el referente a la denotación. Para comprenderla, fijémonos en el ejemplo que sigue: enunciamos la proposición "el mundo es finito" ¿qué afirmamos en este caso?, parecería ser la finitud del mundo, mas ¿a qué mundo nos referimos?, ¿al concepto "mundo"?, si así fuera, estaríamos afirmando que un concepto puede ser finito, mas esta propiedad no puede predicarse de los conceptos desde que son productos ideales, entonces tenemos que concluir que la enunciación no se refiere al concepto, sino al objeto que es el correlato correspondiente. Esta conclusión nos muestra que en las proposiciones la enunciación se verifica respecto de un elemento ajeno al concepto que sirve de sujeto, es lo que llama Russell "término de la proposición"; la función del concepto está limitada a llevar al plano lógico el objeto que le sirve de correlato, esta función constituye la propiedad de "denotación". Estamos entonces en que los conceptos y proposiciones tienen por función denotar términos; añadamos a estas ideas que la denotación presenta la peculiaridad de no ser exclusivamente extensional o intencional (es decir, no tiene predicción por la comprensión o extensión), lo cual permite que los conceptos ni enumeren ni definan a sus objetos, reduciéndose así su función a señalar simplemente al objeto, una especie de relación puramente formal que podría definirse como mera indicación de presencia. Esta propiedad no se limita a los conceptos, sino que también es válida para las funciones, los símbolos, resaltando por esta razón su importancia excepcional para la Logística, pues como ya sabemos que ella necesita trabajar con símbolos y efectuar operaciones basadas en el sólo aspecto formal de los elementos con que trabaja, esta propiedad ahorra y evita los problemas que podrían plantearse si fuese necesario comenzar por efectuar una enumeración precisa o una definición exacta; de otro lado, permite también precisar con toda exactitud el valor o significado de un término.

Russell efectúa una enumeración de las distintas formas de denotación existentes, y por ellas veremos la estrecha conexión que existe entre esta teoría y la de las clases. Los conceptos típicos que denotan (cuyo valor aumenta si pensamos que se usan siempre en las Matemáticas) son las palabras "todos", "todo", "cualquier", "un", "algún" y "él"; estas palabras denotan clases, ya que hacen alusión a pluralidades de objetos, aunque en el caso de los conceptos "un" y "el" no parezca tan evidente, pero veremos que señala una propiedad de las clases; expliquemos el significado de cada una de estas palabras en relación a las clases, para lo cual basta precisar cada concepto haciendo que denote un término, medio este de que cobre valor lógico, la fórmula será, por ejemplo, "todos los a". Este concepto antes mencionado significa una conjunción numérica, indicando que todos los elementos de "a" están tomados en conjunto; "todo a" denota a los elementos de la clase, mas tomados uno por uno, no tiene idea de totalidad; "cualquier a" se refiere a un "a" o término individual de la clase, mas sin identificarlo, siendo por lo tanto un valor variable; "un a" señala una forma especial de disyunción, pues indica la selección de un "a", pero no dice cual es el término concreto que ha sido seleccionado, queda siempre una indeterminación; "algún a" indica también una disyunción con la característica de referirse a cualquier elemento de la clase; "el a" hace mención dè un concepto-clase que existe como un caso singular. Se aprecia a través de lo expuesto, que todas estas formas del denotar tienen directa vinculación con las relaciones que se dan entre la clase y sus miembros, lo cual constituye un punto de gran importancia para el cálculo de clases, y por ende se muestra como un elemento fundamental de la estructura del sistema lógico que comentamos; si queremos volcar estos procedimientos en la esfera práctica, diremos que un sistema de conocimientos científicos puede considerarse como una clase y todo juicio que lo amplíe como un elemento nuevo que se añade al sistema, entonces tiene plena vigencia establecer la relación que puede darse entre el elemento y la clase para ver si efectivamente pertenece o no a ella; siendo entonces de gran utilidad las distinciones antes citadas.

Resulta ya evidente la importancia que la denotación tiene para la teoría de las clases, desde que la función de referencia que indica la denotación permite el empleo de símbolos que representen a las clases, evitando así las cuestiones de una definición conceptual de cada clase, o salvando el escollo de un posible significado multívoco; esta circunstancia cobra especial valor al tratarse de las clases infinitas, por cuanto evita enumeraciones de elementos, las convierte en todos significativos perfectamente operables. Mas el valor de la denotación no se detiene aquí, pues dentro de las Ciencias Matemáticas, que son el motivo de la construcción del presente sistema lógico, cobran una importancia extraordinaria desde que influye decisivamente en la teoría de la definición, de la identidad y muchas otras nociones matemáticas; Russell sostiene que la definición por denotación es "la" definición matemática, pues en esta ciencia no es necesaria la definición conceptual.

Pasemos a exponer ahora una breve descripción del contenido que Russell asigna a las relaciones, punto de gran valor para comprender su aporte a la Lógica. El autor parte de considerar que en el terreno lógico existen más tipos de relaciones que las implicadas entre sujeto y predicado, por cuanto ella supone sólo la existencia de dos términos para una relación, cuando, lo sabemos por las clases, los términos pueden ser infinitos y así la relación vincularia dos clases de ese tipo; de otro lado, la misma relación puede tener una clasificación muy amplia pues las formas que reviste son sumamente varias, además se ha estudiado escasamente la estructura de la relación.

Una relación, en cuanto a su estructura, se compone de tres elementos: los extremos de la relación, que como ya sabemos pueden ser términos infinitos, los que toman los nombres de *referente* o el término del que parte la relación, y *relato* o término en el que recae ella; el tercer término está dado por la relación misma. El conjunto de términos sobre los cuales rige la relación toma el nombre de dominio de la relación, cuyo valor puede ser representado por una variable; el dominio de la relación tiene dos formas: el dominio en sí, formado por los términos vinculados a los referentes; y dominio recíproco si la relación pasa de los relatos a los referentes; la suma lógica de ambas formas de dominio forman el "campo" de la relación. Toda relación tiene un *sentido*: la dirección que sigue, sea de referente a relato o viceversa. La fórmula simbólica de la relación se expresa del modo siguiente: xRy, donde "x" e "y" son los términos y "R" la relación.

Veamos a continuación las clases de relaciones que Russell considera como las de mayor significación lógica. En primer lugar tenemos la relación *recíproca*, que se caracteriza porque xRy es equivalente a yRx; si la relación recíproca es idéntica a sí misma, toma el nombre de *simétrica;* mas en los casos en que la recíproca no es una relación idéntica a sí misma, se denomina *asimétrica*, y en el caso de existir un estado intermedio de identidad, se llama *no- simétrica*. Tenemos también la relación *transitiva* cuando una relación que vale para dos términos vale igualmente para un tercero (xRy; yRz - xRz); cuando la relación no posee la propiedad indicada resulta *no-transitiva;* en el caso de que la relación entre dos términos excluya la relación del primero con el tercero, será *intransitiva*. Existe otro tipo de relación llamada *Reflexiva*, cuando la relación es válida para sí misma, o sea para el término que la sustenta. Tenemos además las relaciones *seriales* aquellas que se refieren a una clase teniendo por dominio a los términos de ella, e introduciendo un orden cualquiera en los elementos. Finalmente podemos citar dos clases de relaciones que se definen en virtud del vínculo que establecen entre uno o varios términos, así en el caso de que la relación sea entre los términos de dos clases y los relacione de *uno a uno,* toma el nombre de relación *biunívoca,* siendo esta quizá la especie de relación de más grande importancia para el Logicismo desde que permite la definición de las clases infinitas y su posterior manejo, y además es el instrumento principal para la definición de número; junto a esta relación están las relaciones *pluriunívocas,* cuando ella se establece en forma de uno a varios o de varios a uno, y hasta de varios a varios.

Las relaciones de que hemos hablado anteriormente, tenían sus vínculos actuando sobre términos, mas puede darse la circunstancia de que existan relaciones de relaciones, es decir, que haya una relación que tenga por dominio y campo a otras relaciones. De este tipo de relaciones destaca la denominada *semejanza* de relaciones, que se produce al poderse establecer una coordinación biunívoca entre las dos relaciones subordinadas: esta propiedad implica que las dos relaciones relacionadas (si cabe la expresión), tienen la misma estructura. La semejanza de relaciones permite realizar un trabajo completamente formal cuando es aplicada a los elementos de un sistema científico, pues evita tener que realizar una labor previa de análisis sobre la naturaleza de los grupos de conocimiento a que se refiere la ciencia en análisis.

Finalizando este punto de las relaciones, diremos que Russell considera que la existencia de ellas es real, o sea, que tienen una objetividad independiente de nuestra mente, y, más aún, no son abstraídas de las cosas que se ofrecen al conocimiento; al igual que las clases, considera que tienen una existencia al modo de las ideas platónicas. Al hacer el estudio de los supuestos filosóficos del sistema de Russell, trataremos con mayor amplitud este tema.

Con la exposición de la teoría de las relaciones, ponemos punto final a los elementos básicos del sistema de Russell. Nos queda por exponer el medio de trabajo concreto de estos elementos y que se encuentra en los tres cálculos lógicos que el autor considera.

Partiremos en el estudio de los cálculos lógicos, del cálculo proposicional. Para comprender correctamente el contenido de este cálculo tenemos que principiar por establecer alguna diferencia entre dos clases de implicaciones; ya vimos con anterioridad la implicación formal;

cuando ella no trabaja tan sólo con variables sin valorizar, sino que asigna un contenido determinado a cada variable, toma el nombre de *implicación material*, que se caracteriza por establecer la relación de premisa a consecuencia, ya no en forma universal e indeterminada, pues escoge un significado de los muchos que posee la variable. Trabajando con esta clase de implicación, el cálculo proposicional establece las formas en que pueden vincularse dos proposiciones, donde una desempeña el papel de hipótesis y la otra el de conclusión. La implicación que hemos indicado, así como la formal, se consideran indefinibles, tanto por necesidad de trabajo como por la razón de que, cuando queremos definir algo, lo que verdaderamente hacemos es mostrar implicaciones: así en el caso de que usemos el género próximo y la diferencia específica, la definición resultante provendría de evidenciar las implicaciones existentes entre el concepto por definir y los dos elementos citados; en conclusión es imposible definir la implicación.

La implicación material supone algunos axiomas que se desprenden de ella, refiriéndose estos axiomas a las posibilidades o especies de deducción que origina el tipo de implicación estiudiada. Russell sostiene que estos axiomas son diez:

1) Cualesquiera que sean "p" y "q", el afirmar que *p-q*, es una proposición.

2) Lo que implica cualquier cosa es una proposición.

3) Lo que es implicado por cualesquier cosa es una proposición. Conviene en este punto hacer una aclaración, pues este axioma parece ser idéntico al anterior. Nosotros partimos en esta explicación de la siguiente fórmula: p-q, que significa la proposición "p" implica la proposición "q"; en el caso del axioma número 2, la relación va de p a q, y en el presente de q a p, se establece por consiguiente, que cualquiera que sea el orden de deducción, la conclusión siempre es una proposición.

4) En una implicación puede omitirse la hipótesis y admitirse la consecuencia como verdadera. Es preciso indicar que Russell siempre considera a la premisa primera como una hipótesis.

5) Axioma de *simplificación*: la afirmación conjunta de dos proposiciones implica la afirmación de la primera de ellas.

6) Axioma del *silogismo*: p-q; q-r, luego p-r.

7) Axioma de *importación*: p-q; r-r; p-q-r; luego pq-r. Dice que si p implica que q implica r, , viene de la afirmación de pq.

8) Axioma de *exportación*: p-q; q-q; pq-r, luego p-q-r. Se deduce del anterior, y en verdad pueden reducirse a uno sólo: el producto lógico. Esto lo afirma el mismo Russell.

9) Axioma de *composición*: si una proposición implica a dos proposiciones por separado, las implica en conjunto.

10) Axioma de *reducción*: p-p; q-q, p-q'-p". Es equivalente a la suma lógica.

Con esto terminamos lo concerniente al cálculo de proposiciones, que como vemos es equivalente a una teoría simbólica de las formas de deducción.

Ingresamos ahora al cálculo de clases. En general este cálculo se ocupa de las relaciones que existen entre una clase y sus elementos, y de las relaciones entre clases. El poder efectuarse, supone la existencia de tres proposiciones primitivas:

—Relación de un miembro a su clase.
—Noción de función proposicional.
—Noción de "tal que".

La relación de una clase con uno de sus miembros, permite distinguir esta vinculación con toda exactitud lógica ya que, según sostiene el autor, se le ha confundido en la Lógica Clásica con la relación de todo a parte, pero no es así; esta relación equivale a la que puede establecerse entre el género y la especie, es pues una relación nueva en el terreno de la lógica.

Las dos proposiciones siguientes tiene valor por permitir una determinación de los valores verdaderos de una variable, la cual representa una clase. La función proposicional realiza sus valores por el tipo especial de implicación significado en la expresión "tal que".

El cálculo de clases trabaja, en la mayoría de sus deducciones, mediante la técnica del cálculo proposicional, pues en verdad el de clases equivale a una generalización del proposicional; si en este trabajábamos con premisas referentes a casos concretos, con las clases trabajamos con el infinito.

Pasemos al último de los tres cálculos: el que corresponde a las relaciones. En este capítulo de la Logística, el aporte de Russell es muy grande, pues antes de él, este cálculo era completamente primitivo, careciendo de un simbolismo apropiado y de principios que colaborasen a su mejor desarrollo. No siendo nuestra intención dar una visión detallada de este cálculo, sino indicar sólo sus elementos y su posición dentro del sistema lógico, indicaremos que se refiere a la determinación de las clases de relaciones, para lo cual emplea los símbolos siguientes: xRy; de este punto se parte para determinar cuando "R" vale para todos los miembros de "x" e "y" pues estas variables indican el dominio de clases; por igual camino se puede establecer si "R" es recíproca, simétrica, reflexiva, etc. Mas en esta determinación de relaciones se llega a un punto semejante al cálculo de clases, pues es posible descubrir relaciones de relaciones así como existen clases de clases, este tema ofrece dificultades lógicas desde que muchas de las paradojas que surgieron en el sistema de Russell nacen de este superponerse de elementos, que suele proyectarse al infinito.

Russell considera que el cálculo de relaciones es de suma importancia para la fundamentación de la Matemática, por cuanto faculta al investigador para precisar en este tipo de ciencia estrictamente deductivo, las diversas formas en que las conclusiones se relacionan con los primeros principios de esa ciencia, y conseguir por este camino el conocimiento y corrección de toda la estructura de ella.

A través de lo que llevamos expuesto, hemos podido ver que el sistema de Russell se desarrolla dentro de una formalización extrema y organizada en función de un cálculo lógico, cuyo fin reside en proporcionar un medio adecuado para el análisis de la corrección de cualquier sistema científico. Mas este carácter absolutamente formal implica en cierto modo el manejo de una realidad sumamente compleja: el infinito; quizá este propósito sea el fin que trata de alcanzar Russell, o sea la construcción de un instrumento lógico capaz de subordinar a toda la realidad, aún en su aspecto que siempre ha parecido ser irreductible como es lo infinito. De estas consideraciones se desprende que hemos visto la estructura de todo el sistema, pero nos falta por revisar algunos puntos complementarios, como son los axiomas que posibilitan el funcionamiento de esta estructura, por cuanto le proporcionan ciertos supuestos necesarios, vinculados especialmente con el problema del infinito. Son los axiomas de la *reductibilidad*, del *infinito* y de la *multiplicación*.

El axioma de *reductibilidad* enfrenta un problema nacido de las relaciones entre clases y funciones proposicionales. Ya indicamos en su lugar que una clase podía ser representada por una función proposicional, ahora bien, si esta afirmación es exacta, de existir dos funciones proposicionales acerca de una misma clase deberían ser equivalentes puesto que ellas trabajan en un plano formal sin determinación de contenido, mas es el caso que, como trabajamos con clases infinitas, ellas pueden tener multitud de relaciones para formar funciones proposicionales y entonces no es posible demostrar la equivalencia de las dos funciones proposicionales sobre una misma clase. Para sostener esa equivalencia en discusión, es que nace el principio de reductibilidad, que sostiene que dos cosas son idénticas cuando tienen todas sus propiedades iguales y es el caso de que las funciones proposicionales evidencian las propiedades formales de una clase y por consiguiente lo afirmado de las variables representantes de las clases llevan a la equivalencia de las funciones proposicionales. Este axioma es una generalización del principio de Leibniz sobre la "identidad de los indiscernibles" el que enunciaba, aproximadamente, que dos cosas que diferían en sus propiedades eran totalmente diferentes. El axioma ha sufrido muchas vicisitudes, llegando a no ser considerado como tal; las razones con que se fundamenta el ataque comienzan por afirmar que la definición de igualdad no es exacta, llegando a reconocer la objeción el mismo Russell. Sin este axioma el sistema queda incompleto y parece ser refutado; en el capitulo donde expondremos las críticas hechas a Russell, indicaremos más extensamente las dificultades halladas por este axioma, que prácticamente ha quedado reducido a una simple hipótesis.

El axioma del *infinito* se aboca la solución de otro problema en conexión con las clases. Según expusimos anteriormente, las clases son el aparato lógico con que se trata a los conjuntos infinitos, sirviendo así para dar una fundamentación de la Aritmética; en este terreno se presenta un problema de mucha importancia: la génesis de las series de números. Una serie de números, como por ejemplo los números naturales, debe poner en claro ciertas cuestiones como determinar cual es el primer elemento de ella, la noción de orden y, principalmente cual es el sucesivo de un número, resolver esta última cuestión es fácil con los números finitos: será el limite de la serie, más aquí se da el caso curioso de que dos números pueden tener igual sucesivo, este problema se agrava con los números infinitos donde, por la carencia de limite, dos números no pueden tener igual sucesivo. En la Aritmética Clásica no existían los números infinitos, mas si los irracionales que planteaban igual problema que los primeros, la única solución parece ser admitir el infinito en la Matemática, pero para ello se precisa de un axioma, y este es el antes citado que sostiene la existencia del número infinito mediante la enunciación de que las clases no tienen limite; por este camino se llega a demostrar que dos números no tienen igual sucesivo.

La importancia de este axioma es tal, que llega a influir en la aplicación de las Matemáticas, el ejemplo más claro es la aplicación a la Física, especialmente a la Física Molar donde la experiencia presenta multitud de posibilidades que necesariamente tienen que ser reducidas a fórmulas matemáticas para poder ser operables; es evidente que si no extiera el axioma del infinito que garantiza el manejo del mismo infinito resultaría imposible la aplicación de las Matemáticas, es decir, que ellas estarían frente a una realidad que desborda sus posibilidades metodológicas. Por estas razones la Logística de Russell introduce el axioma del infinito.

El axioma de la *multiplicación* constituye el último de los principios que supone el sistema de Russell. La función del presente axioma reside en proporcionar un elemento lógico que sirva de fundamento a las operaciones de la Aritmética, como son la suma, multiplicación, etc., desde luego en el plano del infinito. Para comprender su importancia, debemos pensar que toda operación aritmética procede del siguiente modo: establece una relación entre dos clases, de las que selecciona algunos miembros (en el caso de las suma, serán estos los sumandos) los que formarán a su vez una clase nueva (el producto o resultado de la operación); en los números finitos el problema tiene solución rápida, pero en los infinitos está la circunstancia de la clase nula que complica la cuestión, mas el axioma permite afirmar que en una operación con la clase nula el producto será nulo, y si esta clase no está presente se podrá verificar la selección. Este axioma tiene por origen el principio de Zermelo referente al buen orden de los conjuntos, donde se da una ley que permite establecer cuando un conjunto tiene un primer elemento, base del orden; el axioma de la multiplicación indica que el subconjunto o producto de las operaciones de la Aritmética, es efectivamente derivado de los conjuntos anteriores por cuanto también puede ser bien ordenado. Pese a la importancia de este axioma, no ha podido escapar de las críticas que se le hicieron, llegándose a evidencia que lógicamente no podía demostrarse, ni por un procedimiento especial ni por las sucesivas operaciones de aplicación; una vez más los axiomas russellianos parecen ser hipótesis de trabajo.

Al referirnos anteriormente a los elementos de la lógica de Russell fuimos indicando que muchas mostraban dificultades bastante grandes, sin embargo el escollo típico de esta lógica del infinito está representado por las llamadas paradojas, que ponen ante el investigador una disyunción contradictoria sin posibilidad alguna de solución; esta circunstancia lleva a pensar que todo el sistema construido es inconsistente, y por ello, de no hallarse una solución, terminaría por invalidarlo. Vamos a ocuparnos de las paradojas en el sistema de Russell, haciendo notar que las que aquí se señalan no son las únicas pues otros estudiosos han descubierto un buen número más, pero como sólo nos referimos a Russell, únicamente expondremos las que le atañen, que en verdad se pueden reducir a un sólo tipo de paradoja.

Russell habla de dos contradicciones (así denomina a las paradojas), una que se presenta en las clases y otra en los números cardinales, pero ambas giran alrededor del mismo concepto: del elemento que se incluye a sí mismo como miembro, por esto vamos a explicarla como si se tratara de una sola. Esta dificultad lógica nace al tratar las funciones proposicionales; sabemos que ellas contienen una constante y una variable, la variable tiene un valor sin precisar pero que tomado en conjunto puede formar una *clase*, donde cada valor desempeña el papel de término o miembro de ella, ahora bien, cuando queremos determinar el campo o extensión de la variable, nos resulta imposible de hacer, si no mencionamos a la variable misma y por ello se encuentra incluída dentro de su propia extensión; es un problema similar a la vieja regla de lógica que decía "que lo definido no debe entrar en la definición", en el caso presente siempre tendremos que incluir en la definición lo definido, lo que, evidentemente es contradictorio. Aclaramos aún más el caso; la variable se considera como un predicado de la constante, pues cuando ella se determina, la constante resulta verdadera o falsa, en consecuencia la variable no es ni puede ser predicado de sí misma, pero la expresión "la variable no se predica a sí misma" es un predicado y, más aún, de la misma variable, lo cual la convierte, de modo evidente, en predicado de sí y por tanto en un miembro de su propia extensión, además de que por este motivo la variable tendría más extensión que la clase a que se refiere. Esta paradoja detiene por completo todo el proceso de aplicación del sistema, desde que este se emplea, precisamente, para borrar las contradicciones que pueda contener el sistema analizado, además de que viola los principios lógicos tradicionales como el de tercio excluído, el de no-contradicción, etc.; por último un sistema lógico que incluye dentro de él una contradicción que anula su esencia y su valor metodológico, deja de ser un sistema lógico.

Bertrand Russell admitió valerosamente el tropiezo de su lógica y emprendió el trabajo de superarlo. Varias opciones se presentaron al respecto, las que se tradujeron en soluciones diversas: en su primer momento se intentó superar las paradojas recurriendo a una distinción en las funciones proposicionales, pues se dijo que ellas se referían a sus términos y no a la clase de ellos, mas evidentemente la solución fue incompleta desde que el caso del predicado que lo es de sí mismo vuelve a presentarse. También se intentó negar que las funciones proposicionales tuvieran variables, pero esta actitud equivalía a destruir el valor logístico de las funciones proposicionales. Finalmente, ante el fracaso de los dos métodos anteriores, se inventó un tercero: la teoría de los tipos, teoría que ha tenido bastante resonancia en el campo lógico, y que posteriormente ha influenciado en ciertas doctrinas filosófico-lingüísticas; es el esfuerzo más serio para resolver este problema; veamos cómo funciona.

La teoría de los tipos comienza distinguiendo dos clases de rango en toda función proposicional: el rango de verdad o falsedad, y el rango de significado o sentido. Este último determina una jerarquía de tipos según sus componentes, ya que ellos formarán el contenido del significado; siguiendo este criterio, es posible formar varias escalas de tipos, Russell cita dos [23]:

Tipos mínimos

1) Individuo.
2) Clase formada por individuos.
3) Clase formada por clase (ejemplo, el género respecto de la especie).
4) La relación.

Tipos superiores

1) Los rangos, o suma de los tipos mínimos.
2) Las proposiciones, aunque el mismo Russell pone en duda que puedan ser tipos.
3) El número, por su propiedad de seleccionar objetos para formarse.

La forma de aplicación de este método, consiste en determinar en cada función proposicional el tipo al que ella pertenece, de este modo ella puede suponer dos tipos en una sola variable, y deslindado esta posible confusión se evitará la paradoja, pues confundir los tipos equivale a pronunciar frases sin significado alguno; ellas carecen de sentido. Si tomamos la paradoja anterior, aquella de las proposiciones que se predican a sí mismas, podemos apreciar que la proposición "Las proposiciones no deben predicarse a sí mismas" tiene un tipo diferente del mentado en ella: su afirmación se refiere a una clase de individuos (tipo 1), y ella, por referirse a una clase, corresponde a otro tipo: la clase

[23] Tomamos la clasificación de lo expuesto de "Los principios de las Matemáticas".

de clases (tipo 3): de este modo la paradoja anterior carece de sentido desde que confunde a los tipos. Se ve pues que se ha impuesto un orden a las funciones proposicionales.

Esta solución ya estaba indicada en "Los principios de las Matemáticas", pero en la "Introducción a la Filosofía Matemática" Russell la refuerza disminuyendo la calidad real de las clases, pues en el primer libro las considera como entidades ontológicas, mas en su segunda obra ya han perdido esta categoría, se reducen a simples ficciones lógicas:

> "Como veremos en un capítulo posterior, las clases son ficciones lógicas y una expresión que aparenta referirse a una clase sólo tendrá significación si es susceptible de traducirse en una forma en la cual no se haga mención de la clase" [24].

En el capítulo posterior se les indentifica con las funciones proposicionales, lo cual evidencia más aún su falta de realidad independiente. De otro lado el identificarse con las funciones proposicionales las acerca más a la solución planteada por la teoría de los tipos, desde que es posible reducirlas a este procedimiento con más facilidad, a lo cual contribuye la afirmación hecha en el resto de la cita. Además, el mismo Russell agrega que las clases deben ser tomadas en sentido extensional [25], lo que evita el que sean predicados y por lo tanto la paradoja consiguiente.

La teoría parece ser satisfactoria, pero es el caso que Russell en persona descubrió que, si bien se evitaban las paradojas conocidas con el empleo de los tipos, no se podía evitar que surgieran otras particulares a la teoría. Veamos el siguiente ejemplo: tenemos la proposición "toda proposición M es verdadera", cabría aplicar perfectamente la teoría de los tipos, mas para que la proposición fuese legítima debe cumplir la condición de ser verdadera o falsa, y entonces cabe preguntarse ¿la proposición tiene el valor M?, pues si no lo es resulta falsa, y si es falsa no nos sirve en absoluto; de nuevo surge la paradoja, pues tenemos el caso de que esa proposición para serlo, debe incluirse dentro de sí, y de nuevo surge la paradoja: no hay modo de evitar la contradicción que para peor, es de la misma forma de la que se quiso evitar. Esta circunstancia llevó al autor a sostener:

---

[24] B.R.: "Introducción a la Filosofía Matemática". Ob. cit., pág. 195.

[25] Porque así la función proposicional definiría la clase en extensión y no en su comprensión.

> "Por ahora la teoría de los tipos no pertenece a la parte terminada y cierta de nuestro tema: gran parte de esta teoría está algo caótica y oscura" [26].

La desilusión está patente, y dentro del sistema en estudio las paradojas siguen en pie, resistiendo los intentos de solución. Desde luego que otras corrientes lógicas han intentado resolver el problema, pero sus métodos han pecado de drásticos: unos han suprimido de golpe las clases y los números infinitos (las corrientes tradicionales) y otros (los intuicionistas), viendo que la paradoja se produce porque viola el principio del tercio excluido, han eliminado este principio. En fin de cuentas, es uno de los puntos más débiles del sistema de Russell.

[26] B.R.: "Introducción a la Filosofía de la Matemática". Ob. cit., pág. 193.

CAPITULO III

LA LOGICA Y LA MATEMATICA SON UNA MISMA CIENCIA

En los dos capítulos anteriores hemos presenciado un hecho fundamental para la doctrina en estudio: el acercamiento de la Lógica y la Matemática. Por un lado, se amplia la Lógica con el fin de lograr un método apropiado para una nueva fundamentación de la Matemática, y por otro, la Lógica introduce en su campo elementos matemáticos para perfeccionar sus procedimientos, esto último se nota con toda claridad en el sistema de Russell. Con estos elementos de juicio, quizá no resulte sorprendente la espectacular tesis que va a sostener el autor como conclusión final de sus investigaciones, que la Lógica y la Matemática son una misma ciencia, y que la segunda, por consiguiente, puede ser reconstruida a partir de principios y métodos exclusivamente lógicos.

La tesis citada rompe con toda la tradición al respecto. Antes de Russell ambas ciencias estaban perfectamente diferenciadas, y por ello se sostenía que la Lógica estudiaba los pensamientos y la Matemática la cantidad, pero con nuestro autor las cosas toman un rumbo completamente distinto. En primer lugar, la Matemática ya no va a estudiar la cantidad, sino que simplemente se ocupará de cierto tipo de deducción, la comprendida en "las proposiciones de la forma "p implica q"[1], mientras que la Lógica está constituida por el análisis de "los diferentes tipos de deducción"[2]. El motivo de la identificación de ambas ciencias es claro.

Pese a lo violento que pueda parecer esta tesis, no ha dejado de tener antecedentes; el más remoto corresponde a Leibniz. Este filósofo, al analizar los fundamentos de la ciencia de su tiempo, encontró que el único criterio que regía los primeros principios de ella consistía en el empleo de la intuición, lo cual suponía un cierto margen de inseguri-

---

[1] B.R.: "Los principios de las Matemáticas". Ob. cit., pág. 29.

[2] B.R.: Ibidem. Pág. 37.

dad por cuanto esta propiedad de la inteligencia no es siempre igual en todos los investigadores, necesitándose por consiguiente un método objetivo, independiente de quien lo emplease. Por otro lado, la ciencia de aquel entonces carecía de un lenguaje exacto, pues el corriente, que era el usado, no estaba libre de ambigüedades. La conclusión era evidente: se requería una ciencia que tuviese demostraciones estrictas y que usara un lenguaje universal y correcto. El modelo de las demostraciones estrictas era, como lo ha sido siempre, la Matemática, mas al estudiarlas Leibniz descubrió que:

> "En efecto la lógica es tan susceptible de demostración como la geometría, y se puede decir que la lógica de los geómetras o las maneras de argumentar que Euclides ha explicado y establecido hablando de las proposiciones son una extensión particular de la lógica general" [3].

Entonces existe una equivalencia entre las demostraciones matemáticas y las demostraciones lógicas. Mas el aporte de las Matemáticas no se detiene aquí, ellas poseen un simbolismo que reúne las características que faltan al lenguaje común, por lo que podemos pensar en una generalización de este para conseguir el lenguaje universal deseado, surgiendo así la llamada "característica universal". Tomando en conjunto estas apreciaciones, es posible conformar un "ars combinatorio", la que significa una nueva especie de lógica que posee un lenguaje propio y exacto, al mismo tiempo que permite demostraciones irreprochables al estilo geométrico. Se aprecia con facilidad que esta nueva lógica supone la mutua integración de la lógica y la matemática; ya se da un intercambio de elementos para estructurar la nueva lógica, además, tenemos la ya citada equivalencia de la demostración geométrica y la demostración lógica. En consecuencia, un claro antecedente de la tesis russelliana.

Continuando esta línea de pensamiento, los logísticos del siglo pasado fueron perfilando cada vez más el advenimiento de la tesis que exponemos; baste para comprobar la afirmación, el recordar la llamada aritmetización del análisis lógico. En este campo destaca nítidamente la actitud de Frege, quien intenta refundamentar la Aritmética, y realiza su propósito creando un simbolismo apropiado, el cual ha de servir para expresar unas cuantas proposiciones primeras, que podrían desempeñar el papel de los primeros principios, de las que, por medio de reglas puramente lógicas, se puede deducir todo el sistema científico que compone la Aritmética y esto sin que se deslicen contradic-

[3] Leibniz: "Auvries". Charpentier. París, 1846.

ciones dentro de él; Frege por este camino llega a identificar Aritmética y Lógica, desde que las reglas de deducción y las condiciones de validez para las proposiciones primeras son pertenecientes al campo de esta última. Es de notar que Russell estudió de modo profundo y sistemático la obra de Frege, considerándose actualmente a Russell como el descubridor de las investigaciones del matemático citado; este hecho muestra una clara influencia en el pensamiento de Russell.

Con lo expuesto anteriormente, tenemos planteada la tesis de Russell y mencionados sus antecedentes históricos. Nos queda hacer una exposición más en detalle de esta doctrina. Comencemos por recordar que el propósito de Russell al construir su sistema lógico, reside en la fundamentación estricta de la Matemática, y al realizar su intento, descubre que entre las dos ciencias no hay diferencia alguna. La tesis es bastante violenta pues antes de Russell la diferencia de las dos ciencias era clara: formas del pensamiento y cantidad; así lo consideró Aristóteles, el fundador de la Lógica, y también lo creyó así el filósofo alemán Manuel Kant, quien pese a considerar el contenido de la Lógica una teoría de las categorías del conocimiento, nunca pensó en identificarla con la Matemática. Notemos que en estas posiciones existe un elemento común: asignar tanto a la Lógica como a la Matemática un objeto definido y concreto, lo cual en cierto modo supone una consideración ontológica, mas cuando Russell enuncia su tesis, el objeto de ambas ciencias se ha confundido, y la consideración que sobre ellas se hace tiene un carácter más metodológico que ontológico. Veamos porque.

Al comenzar el presente capítulo, mencionamos dos definiciones al respecto, vimos que ambas, pese a referirse una a la lógica y otra a la matemática, coincidían en un punto, en que las dos ciencias eran procesos deductivos, y así existía una equivalencia entre ellas. Desde luego que en este punto surge inmediatamente una objeción: si la identidad reside en que las ciencias citadas son deductivas, toda ciencia deductiva será idéntica a la Lógica, pero la objeción no puede esgrimirse con seguridad contra la tesis de Russell, por cuanto ella presenta otros motivos excepcionalmente poderosos, desde que ha conseguido diluir el objeto que tradicionalmente se le señalaba a la Matemática. Este objeto era la cantidad, pues bien: Russell niega que la cantidad tenga algo que ver con la Matemática. Examinemos sus razones.

Tradicionalmente la Matemática abordaba el estudio de la cantidad mediante la Aritmética, que se ocupaba de la unidad y de la multitud, y con la Geometría, que etimológicamente significaba medida de la tierra. Mas si fijamos nuestra atención en los objetos a que se refiere la Geometría, veremos que ellos están desligados de la cantidad: en efecto, la cantidad supone un más y un menos, o sea el hecho de que un objeto pueda disminuir o aumentar, pero los objetos geométricos son figuras: triángulos, cuadriláteros, puntos, etc., ¿podemos decir que un triángulo aumenta o disminuye?, de sostener esto, equivaldría a decir que un triángulo es más o menos triángulo, lo cual evidentemente es un absurdo, un triángulo *es* simplemente un triángulo. En el terreno de la Aritmética la noción de cantidad parecía más evidente, así es posible decir que un conjunto de números aumenta o disminuye, mas a poco que analicemos esta creencia comprobaremos que no hay aumento ni disminución sino tan sólo el establecimiento de una relación especial, la relación de orden, lo que significa que comparamos el conjunto de números con un criterio anterior, y su resultado será afirmar que ese conjunto de números no está en orden con ese criterio; en otras palabras, tan sólo funciona la coordinación biunívoca entre dos conjuntos, si ella se da, se suele decir que el conjunto no ha aumentado ni disminuído, y lo contrario si esta relación resulta imposible de establecer; luego la referencia a la cantidad es totalmente secundaria, es apenas un juego de palabras para volver más clara una expresión. Si estas razones no parecen suficientes, también podemos estudiar el razonamiento matemático y llegaremos a la misma conclusión, pues es fácil darse cuenta de que sólo establecemos relaciones entre objetos llamados matemáticos, no teniendo mayor contenido este tipo de razonamiento; bástenos como prueba la demostración de teoremas ¿en qué consiste esta demostración?, pues no en otra cosa que en evidenciar la relación entre el teorema y los principios básicos de la Matemática, si esta relación no es contradictoria, el teorema está demostrado. Esta afirmación se refuerza con la naturaleza de la definición matemática; antes del surgimiento de la Logística se creía que ella era una definición conceptual, lo cual suponía una sola materia para la definición: los conceptos, mas es el caso de que en Matemáticas se definen objetos no conceptuales, como las funciones por ejemplo, entonces la definición matemática no explicita contenidos conceptuales sino que fija relaciones de un objeto con los demás dentro de un sistema científico, en consecuencia lo propio de la Matemática es el establecer relaciones y no referirse a la cantidad. Agreguemos aún más pruebas para esta tesis, fijémonos en la operación más elemental de las Matemáticas, la operación de contar; no es difícil suponer que en ella hagamos referencia a la cantidad, mas examinemos con detenimiento esta suposición, ¿qué hacemos cuando contamos? pues relacionar dos conjuntos; esto se aprecia con toda facilidad mediante un ejemplo clásico al respecto, el ejemplo de los salvajes que cuentan sin conocer los números; cuando ellos quieren contar su ganado, lo hacen del modo siguiente: un hombre se sitúa frente al ganado llevando un montón de piedrecitas y un recipiente, la suposición que se hace, en base a experiencias anteriores, es que las piedrecitas son tantas como animales del ganado existan, entonces, al comenzar a desfilar el ganado de uno en uno delante de él, va colocando una piedra en el recipiente por cada animal que pasa, al final deben haber en el recipiente la totalidad de las piedras, mas si algunas quedan fuera, el ganado está incompleto; ¿el salvaje ha recurrido a la cantidad? evidentemente que no, pues se ha limitado a relacionar piedras y ganado, esto es, ha utilizado la relación biunívoca que Russell considera como una de las nociones básicas de las Matemáticas. Esta operación, tan sencilla y rudimentaria, la realiza también el hombre civilizado, sólo que en una forma más técnica, por cuanto reemplaza las piedrecitas por un sistema de números. La consecuencia final de estas apreciaciones, es que la Matemática se ha desvinculado completamente de la cantidad reduciéndose a una ciencia que estudia determinado tipo de relaciones, aquellas que se dan en un proceso deductivo. Es comprensible que una matemática que sólo trata con relaciones pueda ser identificada con la Lógica, que en verdad también da estudio preferente a esta clase de elementos.

Como ya hemos visto, Russell ha diluído el objeto tradicional de las Matemáticas, reduciéndolas a su puro aspecto metodológico y formal, lo que facilita grandemente su anexión a la Lógica; sin embargo queda aún en este campo un obstáculo que eliminar para la plena vigencia de la tesis: las llamadas constantes lógicas o matemáticas, que son sinónimas de elementos distintivos; es evidente que aunque se considere a una ciencia tan sólo en su aspecto formal, este supone siempre la existencia de esos elementos, los cuales son privativos de cada ciencia, y ya por este camino habria un esbozo de diferenciación. En las Matemáticas Clásicas, sean las de Aristóteles o las de Kant, la autenticidad de los principios matemáticos descansaba en la evidencia intelectual, mas como ya vimos, la intuición intelectual perdió su valor ante la llamada crisis de los primeros principios debiendo éstos recurrir a la demostración lógica para poder seguir siendo considerados como fundamento de una ciencia, en otras palabras, debían presentar a la razón los títulos que alegaban para tener tal carácter. La circunstancia antes anotada establece una primacía de los principios lógicos de demostración, pues los principios matemáticos para ser válidos deben recurrir a los anteriores en demanda de criterios de validez, y sólo cuando llenen esos criterios podrían ser considerados correctos; esta posición es completamente nueva, ya que antiguamente la Lógica con sus principios sólo garantizaba la corrección de las deducciones hechas a partir de los principios matemáticos, y esto sólo en el plano formal, en cambio con Russell tenemos el hecho sorprendente de que la legitimidad de los principios citados dependen de los lógicos, no poseyendo en consecuencia propiedades independientes. Esta circunstancia lleva al autor a sostener que como no es posible hallar constantes específicamente lógicas o matemáticas, ya que son equivalentes para el problema de la fundamentación, es necesario concluir que las dos ciencias son una. Esta idea se aprecia en el siguiente párrafo:

> "Así la matemática pura no debe contener indefinibles, excepto las constantes lógicas, y en consecuencia ni premisas ni proposiciones indemostrables salvo las que se refieren exclusivamente a las constantes lógicas..." [4].

Comprobamos que los principios lógicos equivalen a principios matemáticos, lo cual ha de posibilitar la construcción de toda esta ciencia:

> "Toda la matemática se construye por combinación de un cierto número de ideas primeras, y todas las proposiciones pueden establecerse explícitamente en función de esas ideas primeras... Pero además, cuando la Lógica se extiende, como debiera, hasta incluir la teoría general de las relaciones creo que no hay ideas primeras en matemáticas excepto las que pertenecen al dominio lógico" [5].

Ahora tenemos que la Lógica se ocupa de las relaciones, elementos que forman el contenido de las Ciencias Matemáticas.

La tesis expuesta fue enunciada en 1902 en la obra tantas veces citada "Los principios de las Matemáticas"; años después al publicarse en 1910 los "Principia Mathematica", la tesis se confirma, pues en este libro se intenta la demostración práctica de ella desde que, por aplicación de la Logística, se deduce y fundamenta toda la Matemática a partir de la Lógica. Posteriormente, ya en 1919, Russell lanza al público su "Introducción a la Filosofía Matemática" que intenta ser un librito de divulgación, pero actualmente se le considera como una obra de investigación; en ella vuelve a sostener la tesis. Cuando en 1938, se publica una nueva edición de "Los Principios de las Matemáticas", Russell sostiene enfáticamente:

---

[4] B.R.: "Los principios de las Matemáticas". Ob. cit., pág. 35.
[5] B.R.: Ibidem. Pág. 526-27.

> "La tesis fundamental de las páginas siguientes, de que la matemática y la lógica son idénticas, es tal que hasta ahora nunca he visto la necesidad de modificarla" [16].

Sin embargo, pese a esta reafirmación de su punto de vista inicial ya se nota una concepción distinta del contenido de la Matemática, por cuanto en esa misma edición corrige su anterior definición de matemática:

> "Esto me conduce a la definición de matemática, que constituye la primera sentencia de los "Principios". En esa definición son necesarios varios cambios. Para comenzar la forma "p implica q" es solamente una de las muchas formas lógicas que pueden tomar las proposiciones matemáticas" [7].

En consecuencia, se debe buscar una definición más general.... lo que lleva a la siguiente afirmación posterior del autor:

> "En la práctica es posible desarrollar mucho la matemática sin admitir la existencia de nada" [8].

Se ha llegado por este camino al máximo de formalización. La tesis inicial se ha visto más reforzada aún.

Finalmente, al publicarse su última obra sistemática de filosofia ("The Human Knowledge, its scope and limits"), la tesis de la identidad de lógica y matemática sigue en pie. En esta obra al referirse a la matemática, dice:

> "En matemáticas, se comienza por las más simples proposiciones las cuales podemos comprender, y proseguimos por reglas de inferencia que también suponemos comprendidas, para asi constituir más y más proposiciones simbólicas y complejas, las que, si el punto de partida ha sido verdadero, puede ser verdadero su significado" [9].

Se aprecia que Russell mantiene aún el carácter cerradamente deductivo de las Matemáticas. De otro lado ya vimos, al comienzo del capitulo, que la lógica surgia en el plano de la verdad o falsedad de las proposiciones mediante una relación sintáctica de dos sentencias; es evi-

---

[6] B.R.: Ibidem. Pág. 7. Esta cita corresponde al prólogo de 1938.

[7] B.R.: Ibidem. Pág. 9-10.

[8] B.R.: Ibidem, Pág. 11.

[9] B.R.: "The Human Knowledge". Ob. cit., pág. 74.

dente que ambas concepciones llevan a la tesis inicial, y por lo tanto, Russell siempre ha mantenido la identificación de la lógica y la matemática.

Ha sido necesaria la anterior exposición, por cuanto el pensamiento de Russell ha sufrido algunas variantes a través de los últimos años, y por ello era preciso mostrar como su tesis inicial sobre las relaciones de lógica y matemática no han variado en forma alguna.

En síntesis, la matemática y la lógica se identifican, por cuanto la consideración que de ellas se hace es puramente formal y metodológica, dejando de lado cualquier referencia al contenido ontológico del objeto de ambas. Tenemos así una consecuencia grave, que el objeto de una ciencia está determinado por el método que emplea. Pese a lo chocante que pueda parecer esta conclusión, tiene la ventaja de facilitar la fundamentación de la matemática, que fue el problema inicial; la matemática, que siempre fue un modelo de demostración lógica, consigue la total perfección en este terreno al convertirse en lógica, quedando eliminada así toda dificultad que puediera nacer de la necesidad de adaptar un método general a una ciencia particular. A continuación demos una breve ojeada a la fundamentación de la Matemática por este camino.

Primero recapitulemos el modo como opera el sistema lógico de Russell. Se comienza analizando, mediante la teoría de los tipos y los tres cálculos, todas las nociones básicas del sistema científico en estudio, por este camino se llega a establecer las proposiciones que carecen de sentido las que se consideraban principios imprescindibles; aquí juega papel importante la llamada definición "in use" que, a diferencia de la definición conceptual clásica, no define su objeto por medio de conceptos tales como el género próximo y la diferencia especifica, sino que busca la proposición equivalente a la que se quiere definir, consiguiendo de este modo determinar su verdadero sentido, que suele ser muy diferente al logrado por la anterior definición [10]. Fijada la verdadera significación de las proposiciones de la ciencia, eliminados los sinsentidos y las contradicciones, se reemplazan por un conjunto de símbolos que tenga significado unívoco y sean perfectamente operables. Acto seguido, comienza el cálculo deductivo de las conclusiones de todas las premisas, lo cual equivale al desarrollo de todo el sistema científico; el medio de realizar esta finalidad consiste en el empleo de los tres cálculos. Terminada esta última operación, se posee, o se debe poseer, un sistema científico formalmente verdadero y correcto.

---

[10] B.R.: "Los principios de las Matemáticas". Ob cit., pág. 31.

Toda la labor arriba indicada, fue hecha con la Matemática por Russell y Alfred N. Whitehead en "Principia Mathematica". La obra está casi enteramente escrita en Lógica Simbólica, expresándose en esa forma los razonamientos y las definiciones, resultando por esto una labor del todo técnica. No vamos a repetir textualmente esa larga y difícil operación, pues siendo un trabajo puramente simbólico y técnico, tendríamos que limitarnos a una transcripción literal de ese texto; indicaremos tan sólo el modo como se llega a fundamentar la Matemática.

El ideal científico de Russell era construir un sistema que poseyese unas pocas premisas iniciales, y que sus conclusiones tuvieran con ellas una estricta vinculación lógico-deductiva. Esto lo consigue en "Principia Mathematica", aunque al final no logre evitar las temidas paradojas. Russell afirma que:

> "Con la ayuda de diez principios de deducción y de otras diez premisas de naturaleza lógica general (por ejemplo "la implicación es una relación") puede deducirse toda la matemática estricta y formalmente"[11].

Este procedimiento es cierto en los "Principia", pero es nuestra opinión que se refieren más a la técnica de trabajo que a los fundamentos mismos del sistema matemático, ya que esos diez principios, que son las formas del cálculo proposicional expuestas en el capítulo anterior, permiten la tarea práctica, mas nada dicen de los principios de la ciencia. Estos principios de la ciencia creemos haberlos hallado en tres nociones expuestas en "Los principios de las Matemáticas" y que vuelven a encontrarse en la "Introducción a la Filosofía Matemática" última obra sobre este tema que publicó Russell y que es posterior a "Principia Matemática" en unos nueve años. Esas tres nociones fundamentales son las siguientes: *coordinación biunívoca, serie y dimensión*. Se aprecia que las tres se refieren a elementos verdaderamente matemáticos, aunque también pueden ser reducidos a la pura lógica desde que la coordinación es un tipo de relación, la serie puede asimilarse a una cadena de razonamientos y la dimensión, en el sentido que le da Russell, es una relación compleja. Esta última aclaración nos obliga a precisar el contenido de esos tres términos dentro de la terminología de Russell.

Coordinación biunívoca, como ya lo sabemos, es la relación de uno a uno que puede darse entre los elementos de dos conjuntos finitos o infinitos. Serie equivale a una progresión de términos consecutivos y

---

[11] B.R.: Ibidem. Pág. 257. Al menos así se deduce de la lectura de esa página.

conexos, que poseen un orden entre ellos, aquí conviene aclarar que orden para Russell es sinónimo de poder determinar cuando un término está entre otros dos; en última instancia, orden se identifica con la noción de serie. La dimensión constituye uno de los conceptos más abstractos y difíciles de explicar que Russell haya expuesto, por ello más que una definición de él vamos a intentar una descripción. En primer lugar, la dimensión está referida a las series, así se denomina serie unidimensional a aquella cuyos términos son simples, es decir son unidades, o son clases; la serie será de dos dimensiones, si sus términos son clases de clases, y será de tres si los términos son clases formadas por clases que a su vez incluyen otras clases... y así sucesivamente. Luego, podemos considerar a la dimensión como una propiedad de los términos de una serie.

Ahora podemos formularnos la pregunta fundamental: ¿Cómo se construye la Matemática por estos medios? Comencemos por indicar que existen dos ramas básicas en esta ciencia: la Aritmética y la Geometría. Todas las demás especialidades de la matemática, como la Trigonometría, el cálculo infinitesimal, etc., pueden construirse partiendo de las dos ramas antes citadas, tan sólo el Algebra queda en campo aparte, y dentro de la teoría de Russell, ella se ocupa del simbolismo y cálculo matemático, lo cual la identifica casi con la Lógica Simbólica, pero este es ya problema aparte. Volviendo a la construcción de la Matemática, Russell establece tan sólo las dos ramas fundamentales; sostiene que la Aritmética parte del número y la Geometría del punto. Veamos como se construyen esos elementos.

Al definir el número, Russell precisa que no va a definir la pluralidad, sino lo esencial de los números tal como "Hombre es lo que caracteriza los hombres" [12], entonces, ¿qué es lo característico y universal del número?, pues será coordinar pluralidades, o en palabras técnicas, coordinar conjuntos. En efecto, nosotros podemos observar la existencia de pares, tríos, etc., todos estos elementos deben tener algo en común, y ello reside en que los pares pueden coordinarse biunívocamente entre sí, igual cosa sucede con los tríos, y esta propiedad permite agrupar únicamente los elementos homogéneos, ya que si queremos agrupar a los tríos con los pares, la coordinación biunívoca nos indica que no pueden relacionarse entre ellos: Volcando este razonamiento en formas lógicas, veremos que los pares, tríos, etc., son clases y que su característica de poder coordinarse las lleva a formar otra clase que indica la propiedad específica de ellas (de los pares, de los tríos), luego podemos definir el número como "La clase de las clases que le son coordi-

[12] B.R.: "Introducción a la Filosofía Matemática". Ob. cit., pág. 24.

nables" [13]. Y tenemos así construído el elemento básico de la Aritmética; siguiendo el punto de partida señalado por esta definición se pueden construir todas las clases de números existentes, incluso los números infinitos. Queda por determinar un punto: ¿Qué entiende Russell por Aritmética? La respuesta es algo sorpresiva, pues la noción de Aritmética nos dice que ella es una serie unidimensional; aunque la respuesta parece algo esotérica, está perfectamente de acuerdo con el sistema russelliano, pues ya vimos que una serie es unidimensional cuando sus términos son clases o individuos, y los números son clases de clases, luego la definición es comprensible... dentro del lenguaje de Russell.

Pasemos ahora a la Geometría. Russell la define como "el estudio de las series de más de dos dimensiones" [14]. ¿Por qué esta definición? Con nuestros conocimientos anteriores podemos desentrañarla un poco. Dijimos que la Geometría partía del punto, pero que sus verdaderos elementos son las figuras como el cuadrilátero, el plano ,etc.; estos elementos se generan del modo que sigue: la clase de puntos forma la línea, y la clase de líneas el plano, entonces tenemos que los elementos que forman la Geometría son series de más de una dimensión, por cuanto sus elementos son clases de clases. Por sucesiva adición de clases se llega a construir toda la Geometría [15].

Sintéticamente hemos visto como construye Russell toda la Matemática, o mejor dicho, sus ramas principales. Si hay algo que destacar, reside en el hecho de que ha sido construída en forma estrictamente lógica, totalmente deductiva, y con sólo una pocas nociones iniciales. Y estas nociones son aquellas que señalamos como fundamentales.

Finalmente, cabría indicar que la Matemática en manos de Russell ha sido reducida a una estructura de relaciones que se ordenan siguiendo reglas deductivas. Como se aprecia fácilmente, ya nada tiene que ver con la cantidad y sí mucho con la Lógica; ha ganado en corrección formal y científica, pero parece haber perdido a su objeto, toda relación y regla de inferencia necesitan tener un substratum en qué apoyarse. ¿Se da este en Russell?, para responder la pregunta hay que analizar los supuestos filosóficos, lo que haremos en el capítulo siguiente.

---

[13] B.R.: Ibidem. Pág. 35.

[14] B.R.: "Los principios de las Matemáticas", Ob. cit., pág. 460.

[15] Esta concepción puede parecer arbitraria, mas hay que tener en cuenta que Russell considera a la Geometría como una construcción puramente lógica sobre el espacio sensorial, no como una abstracción de éste.

CAPITULO IV

LOS SUPUESTOS FILOSOFICOS

Nuestro propósito es exponer los supuestos filosóficos que Russell da a su sistema lógico-matemático. Esta circunstancia va a determinar algo así como un recorte en el pensamiento general de Russell, pues no es intención nuestra referirnos a todas las ideas filosóficas del autor, sino que las limitaremos al campo antes dicho. De aquí, que puedan parecer omisiones algunos silencios del pensamiento general, mas no se mencionarán por no tener mayor relación con el sistema lógico-matemático.

Antes que nada, enfoquemos el problema que nos lleva a estas consideraciones filosóficas. Vimos en los capítulos anteriores que Russell considera a la Lógica y la Matemática, como teorías deductivas que versan sobre relaciones, carácter que muestra un formalismo absoluto de pensamiento, lo cual llevaría a una des-substancialización de esas dos ciencias las que no tendrían contenido real alguno. Mas este no es el pensamiento de Russell, él mismo se considera un realista auténtico (no olvidemos que uno de sus primeros trabajos fue encaminado a refutar el idealismo de Bradley) y su filosofía ha sido adjetivada de empirista en muchas oportunidades, por lo tanto sería inconsecuente este formalismo extremo de sus ideas lógicas. En verdad, como vamos a verlo posteriormente, no hay tal formalismo pues la Matemática y la Lógica tienen un objeto que *es*, y por ello no son puras formas vacías de contenido, lo que sucede es que el objeto de la lógica y la matemática es un objeto ideal, un objeto del tipo de las ideas platónicas, lo cual hace que estas ciencias tengan un contenido de ser sobre el cual trabajarán los métodos logísticos. Russell en ningún momento ha querido hacer construcciones vacías, su sistema lógico-matemático tiene una realidad propia que se constituye en el objeto que estudiará y fundamentará.

Para llegar a este objeto ideal de la lógica y la matemática, Russell efectúa un análisis previo de los componentes del ser. Tradicionalmente se ha distinguido en todo ser dos principios: la esencia y la existencia, ambas en conjunto daban la plena comprensión del ser, mas el autor ataca contra esta distinción, sosteniendo que lo principal en el ser es su *es*:

> "La distinción entre ser y existencia es importante, y se halla bien ilustrada por el proceso de numeración. Lo que podemos contar debe ser algo, y por cierto que debe *ser*, aunque en modo alguno tiene que poseer el privilegio adicional de existencia" [1].

Tenemos entonces que puede darse un ser sin existir, pues por el simple hecho de aprehenderse en el conocimiento ya *es*, o sea tiene ser. La existencia tiene una vinculación estrecha con lo contingente, con lo que transcurre comenzando a ser y dejando de ser un momento después. En cambio *ser* se predica de cosa muy distinta:

> "*Ser* es lo que pertenece a todo término concebible, a todo objeto o pensamiento posible (abreviando, a todo lo que puede ocurrir en cualquier proposición verdadera o falsa, y a todas tales proposiciones mismas)... Así el ser es un atributo general de todo y mencionar algo es mostrar que es" [2].

Hablando en términos que no pertenecen a Russell, cabe una existencia ideal frente a la existencia empírica. Desde luego que la cita no indica que cualquier cosa nombrada en el lenguaje tenga ser, pues existen criterios para precisar este punto; así sólo las proposiciones que describen algo son las que indican alguna referencia al ser, mas estas frases descriptivas tienen que someterse a la vigilancia de la teoría de las funciones proposicionales las que nos muestran que ese tipo de frases al referirse, por ejemplo, a objetos irreales como los licornios, aclaran que no se menciona ser o existencia alguna, sino simplemente expresan el contenido de una explicación; tomando el ejemplo de Russell [3], al decir "encontré un licornio" no hago otra cosa que indicar una relación de cierta especie entre dos palabras. En cambio, frases tales como "el número es una clase de clases", a más de indicar la existencia de una relación tienen, empleando otra vez un lenguaje ajeno a la terminología del autor, un objeto formal al que aluden.

Queda planteada de esta manera, la existencia de una parte de lo real que no tiene existencia empírica, la que simplemente *es* y por

[1] B.R.: "Los principios de las Matemáticas". Ob. cit., pág. 110.
[2] B.R.: "Los principios de las Matemáticas". Ob. cit., pág. 549.
[3] B.R.: "Introducción a la Filosofía Matemática". Ob. cit., págs. 237 y ss.

lo tanto tiene ser. ¿Podemos ingresar a esta nueva región ontológica? Esta ya es una cuestión de teoría del conocimiento, y es un requisito previo para poder hacer afirmaciones sobre una región de esa clase. Russell resuelve este problema del modo que sigue.

Para una mejor comprensión de las ideas de Russell, hagamos una referencia a lo que se llama Filosofía Tradicional, entendiendo por ello la línea aristotélico-tomista. Dentro de esta filosofía el conocimiento sólo tenía una fuente, los sentidos, de ella la inteligencia abstraía los datos esenciales y formaba así los conceptos por los cuales se elabora el conocimiento. Frente a esta posición, está la posición kantiana, que como fuente del conocimiento, admite el "apriori" o categorías del entendimiento con las que se comprenden los datos de los sentidos. Tenemos así dos fuentes diferentes para el conocimiento, Russell admite las dos fuentes no considerándolas antitéticas:

> "Así, aún admitiendo que todo conocimiento es suscitado y causado por la experiencia, sostendremos, sin embargo, que algún conocimiento es *apriori*, en el sentido de que la experiencia que nos hace pensar en él, no basta para probarlo, sino que dirige simplemente nuestra atención de tal modo que vemos su verdad, sin que requiera una prueba experimental" [4].

En consecuencia, hay un conocimiento independiente de la experiencia para su verificación veritacional, dependiendo esta de naturaleza extrinseca a lo empírico. Este tipo de conocimiento apriori es el que nos va a conducir a la nueva región ontológica. Este conocimiento tiene su propio método para desarrollar su contenido: la deducción, el método por excelencia para los conocimientos apriori, y que al mismo tiempo es el método de la lógica y la matemática. La conclusión es obvia.

En resumen, dentro de las esferas del conocimiento los datos empíricos sólo sirven para fijar nuestra atención en cierta clase de conocimientos, no pudiendo determinar ninguna propiedad de ellos, estos conocimientos poseen su criterio de verdad y propio y también un sector ontológico independiente.

La conclusión de los párrafos anteriores es bastante clara, cabe la existencia del ser ideal, y Russell así lo sostiene. Considera que todo conocimiento debe tener un objeto, y es así que tenemos conocimientos de ciertos entes que no se dan en la existencia empírica, como es el caso de los universales y las relaciones, además estos objetos no son mentales desde que nosotros los aprendemos y no los construimos; así nos damos cuenta de las propiedades de los números y bien fácilmente

[4] B.R.: "Los problemas de la Filosofía", Ob. cit., pág. 89.

constatamos que ellas son independientes de nosotros pues nos presentan problemas que obligan a seguir un determinado camino para resolverlos, el cual muchas veces contraría todos los intentos que realizamos para hacerlo seguir nuestros deseos. De otro lado, también podemos comprobar que son entes dados como contenidos del pensar y no se confunden con el pensamiento mismo, de ser así, estos entes variarían de persona a persona, y la realidad es muy distinta: su constitución es siempre constante en todo ser humano que los conozca. Además de estas cualidades particulares, tenemos el hecho de que al verificar la verdad respecto a las afirmaciones que hacemos sobre ellos, la verificación es independiente de cualquier comprobación empírica, llegándose a determinar su verdad por simples procedimientos apriorísticos, como son la deducción a partir de ciertos primeros principios. Todas estas consideraciones nos llevan a tener que aceptar la existencia de seres ideales tal como Platón ya lo había anunciado hace bastante tiempo:

> "La "teoría de las ideas" de Platón, es una tentativa para resolver este gran problema, y a mi juicio es uno de los intentos mejor logrados hasta ahora. La teoría que defendemos en lo que sigue, es, en un sentido amplio, la de Platón, sólo con las modificaciones que el tiempo ha demostrado ser necesarias" [5].

Con esta afirmación, está admitido el ser ideal; es un ente que existe con independencia del hecho de que nosotros lo pensemos, lo cual le confiere perfecto carácter ontológico.

El contenido del ser ideal está dado, como ya lo dijéramos, por los universales y las relaciones:

> "Usaremos, pues, la palabra "universal" en lugar de la palabra idea, para indicar lo que quiere decir Platón" [6].

Las relaciones han sido descubiertas, en cuanto a su carácter ontológico, a partir del lenguaje:

> "Cuando examinamos las palabras del lenguaje ordinario, hallamos, a grandes rasgos, que los nombres propios representan los particulares, mientras que los otros substantivos, los adjetivos, las preposiciones, y los verbos representan los universales" [7].

---

[5] B.R.: "Los problemas de la Filosofía". Ob. cit., pág. 108.
[6] B.R.: "Los problemas de la Filosofía". Ob. cit., pág. 110.
[7] B.R.: "Los problemas de la Filosofía". Ob. cit., pág. 110.

En conclusión, los universales son entes, y las relaciones, también poseen carácter ontológico. Añadamos una razón más para confirmar estas aseveraciones:

> "Pero los universales no existen en este sentido; diremos que *subsisten* o que *tienen una esencia*, donde el "esencia" se opone a "existencia" como algo intemporal"[8].

Con lo cual los universales cumplen la condición que antes enunciáramos respecto del ser: que el ser tiene realidad por que *es* simplemente, y no por tener existencia que tan sólo es una propiedad de ciertos entes como son los físicos.

Vinculemos esta doctrina ontológica con el sistema lógico-matemático de Russell. Este sistema que suponía la identidad de la lógica y la matemática, mostraba que la naturaleza intrínseca de ellas se manifestaba en relaciones y procesos deductivos que partían de unas cuantas premisas iniciales, las que no hacían referencia a nada concreto, por ejemplo, el concepto de serie es del todo abstracto. Estas características podrían hacer suponer que a las dos ciencias en estudio se les ha reducido a formas vacías de contenido, siendo por lo tanto simples construcciones mentales, algo así como un juego de reglas puras. Mas con la doctrina ontológica que hemos mencionado, la lógica y la matemática recobran su carácter objetivo y llegan por ese camino a tener un substratum ontológico: las relaciones son entes ideales; lo mismo puede decirse de las clases, pues ellas denotan conceptos universales. Entonces, clases y relaciones son entes con existencia extra-mental, que poseen su propio contenido de ser, y por tanto son un objeto de estudio perfectamente delimitado. La lógica y la matemática serán las ciencias encargadas de construir un sistema de conocimientos sobre esta nueva región de la realidad, teniendo por fin, el desentrañar su contenido inteligible, en consecuencia estas dos ciencias ya no son ni creaciones mentales ni juegos de reglas puramente formales, sino la expresión de las características de un nuevo tipo de entes. Por este camino esas ciencias logran su total independencia de la realidad empírica; por mucho tiempo se creyó que la Geometría era medida de la tierra, y que la Aritmética dependía de la necesidad de contar cosas, lo cual, evidentemente, traía dificultades desde el punto de vista metodológico pues para conseguir un criterio de verdad o para crear un método adecuado, se debía tener en cuenta la vinculación a la experiencia, como es el caso de la Geometría de Euclides que se construía siempre ligada al espacio que

---

[8] B.R.: "Los problemas de la Filosofía". Ob. cit., pág. 118.

percibimos con los sentidos, y ya hemos visto como era posible una geometría que no considerase este espacio; por estos motivos los métodos no podían llegar a una debida fundamentación de las matemáticas, mas al comprobarse esta independencia y la posesión de una realidad propia e incomunicable, permite dar con el verdadero fundamento de las ciencias: perteneciendo ellas a una región ontológica diferente, requieren un método totalmente adecuado a la naturaleza de su objeto. Por estos motivos también es fácil comprender la identidad de lógica y matemática: cabe hacer una diferenciación si ambas tienen objetos distintos, mas si ambas se ocupan de un sólo tipo de entes, es comprensible que las dos hayan visto el mismo objeto desde un ángulo diferente, mas con un análisis adecuado se descubre que ese objeto es uno sólo.

Las consecuencias de esta doctrina no se agotan en lo expuesto, sino que abarcan un campo de gran importancia: el infinito. Esta ha sido uno de los escollos insalvables que siempre han hecho tropezar a todas las teorías científicas tanto tradicionales como modernas; como ejemplo, sea suficiente citar el problema de la inducción física, donde ante la multiplicidad de hechos se presenta la cuestión de por qué generalizamos juicios sobre todos ellos. La esencia de este problema reside en la circunstancia de que ante la infinidad de posibilidades que capta nuestra conciencia no tenemos medio alguno para englobarlas en su totalidad; así los conceptos universales siempre tienen que hacer referencia a un grupo infinito de cosas, verbigracia, el concepto universal "hombre" tiene por substratum a todos los hombres existentes, pero aquí surge el escollo ¿denota verdaderamente el universal a todos sus particulares?, y la respuesta es siempre ambigua; se aprecia que en este problema subsiste la relación idea-cosa. Con la doctrina de Russell el problema se simplifica sorprendentemente; en primer lugar, los universales son entes subsistentes por sí mismos desde que pertenecen al reino de los seres ideales, y, aunque hacen mención de conjuntos infinitos, se independizan de la fatal relación idea-cosa, ya que su substratum no depende de una realidad empírica; entonces el universal infinito se presenta como un objeto acabado, se presenta, digámoslo así, de golpe a la conciencia la cual no tiene que efectuar inducciones incompletas, sino que capta en bloque la totalidad. Esta totalidad se descubre por deducción apriori o por inducción de semejanza o analogía. En buena cuenta, se presenta un infinito actual y no potencial como se ha creído tradicionalmente. Toda la doctrina posibilita un tratamiento metodológico del infinito como ya vimos; para comprender claramente esta solución, pongamos un ejemplo: el de la paradoja de Aquiles y la Tortuga.

Recordemos que Zenón de Elea afirmaba que si Aquiles, el mejor corredor de Grecia, daba una ventaja, por mínima que fuera, a la Tortuga, jamás podría alcanzarla. ¿Por qué?, pues porque cuando Aquiles cubriera la ventaja dada, la Tortuga habría caminado otro tanto, y por esta circunstancia, que se repetiría constantemente, jamás Aquiles la alcanzaría. La teoría lógica del infinito soluciona este problema por el empleo de la coordinación biunívoca; veamos el procedimiento. La paradoja supone la existencia de dos conjuntos de momentos: los que recorre Aquiles y los que recorre la Tortuga; estos momentos se prolongan al infinito y por ello Aquiles siempre se retrasa, mas es el caso de que la carrera tiene un campo limitado (el terreno a recorrer) y de este modo estamos incluyendo clases infinitas dentro de clases finitas, además existe otra razón que derrumba la paradoja: entre dos conjuntos infinitos cabe la coordinación biunívoca, y si ella se establece, desaparece la ventaja de la Tortuga, pues Aquiles alcanzará fácilmente los lugares de ventaja. En conclusión, la paradoja confunde dos clases de conjuntos y olvida una de las principales propiedades de los conjuntos infinitos.

Hasta aquí tenemos un sistema científico y filosófico perfectamente estructurado; las dificultades tradicionales al respecto han desaparecido, pero... es el mismo autor quien lo destruye completamente, pues algún tiempo después de sostenida esta tesis se retracta de ella y deja de nuevo en vigencia los viejos problemas. Es un caso curioso de inestabilidad de las propias ideas, más también un caso excepcional de honradez científica, pues el autor al comprobar que su sistema no puede sostenerse por las dificultades intrínsecas que contiene, anuncia públicamente que es preciso rectificarlo.

La tesis antes expuesta fue sostenida por el autor en 1912, al publicar su obra "Los problemas de la Filosofía", libro este que equivale al fundamento filosófico de las doctrinas lógico-matemáticas sostenidas en "Los principios de las Matemáticas" y en "Principia Mathematica". Mas algún tiempo después, al publicar su última obra específicamente matemática, la "Introducción a la Filosofía Matemática", abandona el punto de vista ontológico de las clases, apoyándose en el hecho de que las clases infinitas no pueden escapar a las paradojas y por tanto sólo cabe un tratamiento metodológico de ellas; así pues, su valor ontológico desciende completamente, hasta quedar reducidas a "ficciones lógicas" [9] por cuanto "una expresión que aparenta referirse a una clase sólo tendrá significación si es susceptible de traducirse en una forma

[9] B.R.: "Introducción a la Filosofía Matemática". Ob. cit., pág. 195.

en la cual no se haga mención de la clase" [10]. Aquí está la principal dificultad de la teoria de las clases, pues para poder evitar las paradojas tiene que aplicarse la teoría de los tipos y por este motivo la proposición que exprese una clase no debe referirse a ella, lo cual sería una contradicción evidente si las clases fuesen algo real. De otro lado tenemos que Russell también pone en duda la existencia de conjuntos infinitos:

> "No se puede decir con *seguridad* que haya en el mundo conjuntos infinitos. Suponer que existan es admitir lo que llamaremos el "Axioma del infinito". Aunque varias vías posibles sugieren la esperanza de poder probar este axioma, existen motivos para temer que todas sean engañosas, y que no haya ninguna razón lógica concluyente para imponernos la creencia de su validez" [11].

Es fácil apreciar, que todo el fundamento ontológico ha desaparecido pues su demostración lógica resulta casi imposible. En consecuencia la realidad de los universales se ha venido por tierra.

Esta autorrefutación de su propia doctrina, se confirma plenamente cuando en 1928 edita una obra que resumía sus principales ideas filosóficas, los "Fundamentos de Filosofía". Con toda claridad admite la no existencia de los universales como realidades en sí:

> "La única cuestión acerca de los universales que necesita traerse a colación en este punto, es que el empleo correcto de las palabras de sentido general no es una prueba de que el hombre piense en universales. Se ha supuesto a menudo que ya que podemos emplear una palabra tal como "Hombre" correctamente, debemos ser capaces de una "idea abstracta" correspondiente al hombre; pero esto es por completo un error" [12].

Es preciso resaltar un punto importante, y es que Russel llega a la conclusión citada en base a un estudio lingüístico. Ya en esta etapa de su pensamiento se nota el viraje que efectúa en el estudio de lo real; anteriormente partió de consideraciones lógico-matemáticas, ahora parte del plano del lenguaje y más tarde establecerá su tesis de que este tipo

---

[10] B.R.: "Introducción a la Filosofía Matemática". Ob. cit., pág. 195.

[11] B.R.: "Introducción a la Filosofía Matemática". Ob. cit., pág. 115.

[12] B.R.: "Fundamentos de Filosofía". José Janés, Editor. 1956. Barcelona. Traducción de R. Crespo y Crespo, pág. 52-3.

de estudio permite llegar al perfecto conocimiento de lo real, pues el lenguaje retrata la realidad. Entonces es correcto sostener que si nuestras palabras universales no aluden a ninguna realidad externa, carecen de contenido ontológico.

Tiempo después, es ya 1940, Russell tiene una recaída nominalista. Su obra "Investigación sobre el significado y la verdad" [13] así lo permite suponer:

> "De ello concluiré, no sin cierta vacilación, que hay universales y no meras palabras generales. La similaridad, por lo menos, tendrá que ser admitida..." [14].

Siguiendo su método lingüístico, llega a la conclusión de que podemos eliminar todos los universales, mas quedará uno que resista la eliminación: el concepto de similaridad, el que si no es considerado como universal, no se explica debidamente, pues constatamos que no sólo lo captamos al conocer el significado de las palabras, sino que también por la percepción llegamos a conocerlo, luego tiene que poseer alguna realidad. También Russell hace una afirmación igual de las relaciones:

> "Parece que no hay medio de eludir la admisión de relaciones como partes de la constitución no-lingüística del mundo... Palabras tales como "antes" o "encima de" "significan", tan ciertamente como los nombres propios algo que se da en los objetos de la percepción" [15].

El retorno a la realidad de los universales y las relaciones se aprecia con bastante claridad. Su punto de partida reside en el hecho de que todas nuestras percepciones tienen un objeto, y al analizar estos objetos descubrimos que muchos corresponden a relaciones y conceptos universales; esta situación se refuerza por la teoría del lenguaje, la cual, como ya hemos visto, traduce en su estructura y elementos, la composición de la realidad, y dentro de este esquema encontramos a las relaciones y a los universales, por consiguiente tienen que tener algún tipo de realidad.

En 1948 Russell edita "Human Knowledge", obra que contiene el último estado de las ideas filosóficas de este pensador. Aquí la realidad de los universales y de las palabras que denotan relaciones desaparece por completo; los primeros, quedan en la categoría de generalizaciones

---

[13] B.R.: "Investigación sobre el significado y la verdad", Buenos Aires, Losada, 1946. Traducción de José Rivera Armengol.

[14] B.R.: "Investigación sobre el significado y la verdad". Ob. cit., pág. 426.

[15] B.R.: "Human Knowledge", Ob. cit., pág. 526.

hechas por el hábito de efectuarlas, y las segundas a simples conceptos relacionantes que por si solos no significan nada. Los universales son relacionados con el problema de la inducción, y así llegamos a este tipo de conceptos por contemplación de particulares, pero ¿el concepto universal conseguido tiene un correlato real de igual carácter? evidentemente que no, si lo hemos logrado, es porque tenemos el hábito de englobar caracteristicas particulares en todos generales, y no porque captemos una realidad especificamente universal:

> "They are known in the sense that we generaliza in accordance with them when we use experiencie to persuade us of a universal proposition such as "dog bark". As mankind have advance in intelligence, their inferential habits have como gradually nearer to agreement with the laws of nature which have made these habtis, throughout, more often a source of true expectations than false ones. The forming of inferential habits which lead to rue expectations is part of the adaptation to the enviroment upon which biological survidal depens" [16].

Las relaciones son lo que Russell llama "syntax-words", para diferenciarlas de las "object-words". Las segundas denotan objetos como puede ser el caso de "pero" o "gato"; las primeras sirven para ubicar a las segundas dentro de un contexto significativo, y para manifestar nuestro grado de creencias en las "object-words"; por si mismas no indican nada, debiendo estar referidas a las segundas para poder cobrar algún valor.

Se desprende fácilmente de esta exposición que Russell ha renunciado de nuevo a ontologizar los universales y las relaciones. La obra que citamos, y que es la última de filosofía estricta escrita por él, lo expone claramente.

¿Qué consecuencias podemos extraer de esta situación? Para comenzar, toda la teoría lógico-matemática pierde su carácter real (real dentro de un plano ideal), para convertirse en un sistema puramente formal, donde sólo se trabaja con relaciones y conceptos abstractos; por este motivo, la teoría de Russell terminó por acercarse a una de las escuelas que más la combatió, el Formalismo preconizado por el alemán Hilbert, donde las Matemáticas se convierten en un conjunto de símbolos que carecen de contenido concreto, y que siguen determinadas reglas deductivas; el sistema de Russell, falto de contenido ontológico,

---

[16] B.R.: "Investigación sobre el significado y la verdad". Ob. cit., pág. 423-24

ideal, se vuelve completamente formalista, pese a la aversión que el mismo autor profesaba por esa escuela, de la cual decía:

> "Los formalistas son semejantes a un relojero que se halla tan absorvido por el deseo de que sus relojes tengan buen aspecto que olvida que la misión de los mismos es la de señalar el tiempo" [17].

Por otra parte, el sistema de Russell queda reducido a su puro aspecto metodológico; es un simple método para corregir los errores lógicos que se cometan en la construcción de la matemática, pero no es una ciencia con objeto propio y diferenciado.

[17] B.R.: "Los Principios de la Matemática". Ob. cit. Prólogo a la edición de 1938.

CAPITULO V

LAS CRITICAS

Cuando Russell hace la exposición completa de su sistema y presenta su realización práctica en los "Principia Mathematica", otras escuelas intentaban casi simultáneamente efectuar igual labor de fundamentación de las Matemáticas. Así el formalismo, intenta este trabajo mediante el empleo de símbolos que por sí mismos no tienen significado alguno, y sólo lo adquirirán cuando todo el sistema matemático esté construído; para efectuar esa construcción, se eligen un número determinado de principios, cuya verdad se asegura por medio de ciertas leyes generales como son las enunciadas por Peano, luego se procede a un trabajo deductivo estricto de acuerdo con los procedimientos logísticos; terminado este proceso se tiene reconstruída a la Matemática. Para asegurar la corrección de todo el sistema, Hilbert, el fundador de esta escuela, creó dos ciencias complementarias: la Matematemática o teoría de la prueba, y la Metalógica, que se encargaba de proporcionar reglas para la admisión y empleo de los símbolos.

Junto a esta escuela surgió, la llamada orientación Intuicionista, encabezada por Bouwer y seguida por Weyl, Heityng y otros. Su sistema difiere fundamentalmente del Formalismo y del Logicismo de Russell, coincidiendo tan sólo en el empleo del método logístico, mas con la peculiaridad de emplear un simbolismo diferente. En la fundamentación de las matemáticas, consideran un punto que las dos escuelas anteriores han rechazado: el valorizar la intuición intelectual para lograr los primeros principios de esta ciencia; así, sostienen que la intuición kantiana del espacio y el tiempo, es la forma básica de la cual se derivará la Aritmética, y de esta todas las demás ramas de la matemática; mediante el tiempo distinguimos dos sucesos, que al ser volcados a conceptos, originan la serie de los números; gracias a los procedimientos logísticos podemos efectuar la construcción de las matemáticas, pero es de notar que en su método lógico no admiten el principio de tercio excluído, y consideran que la lógica posee más de dos valores. Con estos elementos, el Intuicionismo fundamenta la matemática.

Estas tres escuelas nacen todas en el presente siglo, sin embargo no son las únicas que acometen el intento de fundamentar las matemáticas; también está la escuela clásica, que intenta resolver el problema mediante la aplicación de las doctrinas aristotélico-tomistas. Esta escuela tradicional parte de la determinación gnoseológica de la fuente del conocimiento matemático, el cual, sostiene, surge de la abstracción que la inteligencia hace en los datos sensoriales que presenta la materia; por esta vía se consigue llegar a las cualidades primarias de la materia: la extensión y la cantidad. La cantidad puede ser divisible, y por ello engendra la multitud, que partiendo del concepto de unidad llega al de número y así fundamenta la Aritmética; la extensión origina los conceptos de punto, línea, figura, etc., y por este camino se construye la Geometría. Tenemos pues, las nociones básicas para fundamentar las dos ramas principales de la Matemática; completa esta tesis la afirmación de que existen axiomas y postulados, caracterizados por ser evidentes sin necesidad de demostración; estas nociones a su vez permiten realizar los procesos de demostración constructiva, orientada a evidenciar la existencia de los entes matemáticos, y la demostración esencial que muestra la verdad de las proposiciones y juicios que emitimos sobre los entes matemáticos (teoremas, problemas); esta labor se verifica por procesos lógico-deductivos, realizados mediante el empleo del silogismo.

Estas son las principales escuelas que intentan resolver el problema de fundamentar correctamente la Matemática. Frente al sistema lógico de Russell, colocan una gran cantidad de objeciones, pues es fácil apreciar que las tesis son bastante diferentes. Vamos a efectuar el análisis de estas objeciones, pero con la peculiaridad de hacerlo en forma sistemática, es decir, según los temas que Russell ha expuesto, y no según las objeciones hechas por cada escuela. Esta circunstancia nos permitirá ver como es confirmada o refutada en detalle la obra de Russell.

Comencemos por analizar el uso del símbolo. La primera objeción que se hace al respecto, reside en el hecho de que el símbolo enmascara la realidad del objeto a que hace referencia, simplificando indebidamente su estructura, en otras palabras, ya no tenemos contacto directo con el ente matemático sino con una representación suya que si bien favorece el trabajo lógico, impide una verdadera captación de la realidad del ente; por este motivo, sostiene Darbon, crítico filosófico inclinado al intuicionismo[1] se ha llegado al realismo de las clases, olvidando la base empírica que tiene el conocimiento matemático, trabajamos con simples signos que de por sí no dicen nada, mas como tal cosa resulta algo paradójica, tendemos a explicar que esa realidad abstracta es verdaderamente realidad; de este modo falta siempre la referencia a lo concreto. De otro lado se critica a Russell el hecho de que no haya construído una teoría del símbolo, en la cual existieran reglas que guiasen la elección de símbolos y las condiciones para un trabajo científico con ellos; cuando Russell emplea los símbolos, dicen, simplemente recurre a la substitución por identidad formal o a la definición en "uso" del símbolo, mas esto debe suponer un trabajo previo. La crítica tiene mucho de verdad, por cuanto la elección de símbolos en Russell no va precedida de una teoría adecuada, mas cabe decir en su descargo, que en la época de presentación de su sistema esta necesidad no se sentía con tanta exigencia; las escuelas diversas que empleaban la logística llegaban hasta el extremo de poseer su propio simbolismo particular, como es el caso citado del intuicionismo; tan sólo tiempo más tarde se comprueba la necesidad de una teoría simbólica específicamente lógica, (decimos esto por cuanto existen en forma paralela a estas investigaciones, una corriente que analiza el símbolo, pero con la peculiaridad de orientarse por el terreno lingüístico y no por el campo específicamente lógico), es así como surgen la metalógica, que dentro del Formalismo cumple el papel citado, y también la Semiótica, ciencia nueva que se ocupa de investigar los problemas referentes a los símbolos. La importancia del simbolismo russelliano reside en la circunstancia de haber presentado un sistema que, con pocas modificaciones, sigue siendo el preferido de los actuales logísticos.

La objeción que va contra la excesiva abstracción de los símbolos, lo cual lleva a substancializar las clases, pertenece ya al terreno de los fundamentos filosóficos. Esta objeción se orienta por el lado de criticar la creencia de que las palabras necesariamente señalan un trozo de lo real, y por ello conocer la palabra es conocer la realidad; esta actitud, dicen, es semejante a la profesada por las mentalidades primitivas para quienes el lenguaje tiene las propiedades mágicas de influir en la realidad. Por el momento vamos a dejar esbozada la objeción, para retomarla en todo su campo cuando nos refiramos a las críticas hechas al platonismo de Russell, o sea, las que van contra los fundamentos filosóficos del sistema.

---

[1] André Darbon: "La Philosophie des Mathematiques". Press Universitaires de France, Paris, 1949.

Pasemos ahora a examinar uno de los puntos más discutidos de toda la obra de Russell: los axiomas. La principal crítica va contra el carácter exclusivamente racional de ellos, así Darbon plantea un dilema: para Russell los axiomas no pueden venir de la experiencia porque de ser así no tendrían necesidad lógica, mas es el caso que tampoco pueden venir de las puras formas racionales, por cuanto lo abstracto es incapaz de fundamentarse a sí mismo, en consecuencia los axiomas russellianos parecen ser formas aéreas, sin realidad alguna. Poincare, uno de los precursores de la corriente intuicionista, sostiene igual crítica: sin una intuición de los axiomas no podemos llegar a sostenerlos como base de un sistema científico; esta crítica se ve reforzada por el célebre teorema de Godel, quien probó que en un sistema científico siempre quedará alguna proposición sin prueba lógica lo cual contraría el ideal russelliano de hallar un sistema donde hasta los axiomas tuvieran su demostración racional. Esta circunstancia se presenta con los axiomas logísticos de Reducibilidad y del Infinito; ellos son introducidos para probar la existencia de funciones proposicionales y de clases, mas resulta que no poseen demostración alguna, y como tampoco Russell efectúa un llamado a la intuición, quedan reducidos a la categoría de recurso empleado en caso de necesidad. Las críticas expuestas ponen al descubierto la deficiencia que tienen los axiomas russellianos, pues como dentro del sistema lógico no se han demostrado y el mismo autor rechaza el método intuitivo para probar su evidencia, no tienen más fundamento que la dificultad surgida en ese instante de la investigación; por este motivo, no pueden servir de base al sistema logístico, a menos que se les consideren como simples proposiciones sin mayor ni menor valor que las demás del sistema.

Entremos ahora al campo de las funciones proposicionales. Vimos en un capítulo anterior que ellas se apoyaban en el axioma de reducibilidad para poder cumplir su cometido, pero como acabamos de apreciar, este axioma no posee la suficiente calidad científica para desempeñar el papel que se le ha encomendado, en consecuencia el problema de las clases descriptivas sigue en pie; al respecto Poincare anota que todo el problema surge por dar una consideración extensional a las funciones proposicionales, cuando ella debió ser comprensiva, lo cual facilitaría el empleo de definiciones predicativas, con lo que el problema dejaría de serlo, mas como no se sigue este camino, el problema queda insoluble, con el añadido de que, al no poderse precisar el contenido de la función proposicional, tampoco podemos saber si es verdadera.

Wiitgenstein, uno de los más brillantes discípulos de Russell, también critica esta situación llegando a reducirla a un círculo vicioso: para saber si la función proposicional comprende a todos los elementos de la clase, debemos definirla por la propiedad de la clase, mas ya se está presuponiendo la existencia y contenido de ella y esto es lo que precisamente se quiere decidir. En consecuencia, este problema, no tiene solución adecuada en el sistema de Russell; al menos, así parece indicarlo el estado de las críticas.

Al analizar el sistema lógico, vimos que uno de los puntos capitales es el cálculo proposicional, por cuanto mediante su empleo, se llega a demostrar si la deducción de proposiciones a partir de una premisa inicial es correcto; tampoco este punto ha quedado a salvo de las críticas. El primero en descubrir resquebrajaduras en este cálculo fue Poincare, quien precisó que no agotaba las posibilidades de deducción, ya que el problema que debían resolver era algo diferente a como lo consideraba Russell; en efecto, según Poincare, no se trata de un estricto y único proceso deductivo el extraer conclusiones a partir de unas premisas, sino más bien lo que se busca es probar que una propiedad contenida en la enunciación de la premisa, pertenece a todos los entes de la clase sobre la cual tiene validez esa premisa, entonces el problema viene a convertirse en una especie de inducción: probar que la propiedad "a" pertenece a todos los miembros del grupo de entes "b"; ahora bien, por simple cálculo proposicional no podemos llegar a ese resultado, por cuanto tan sólo nos indica las clases de implicación material que se dan entre proposiciones (donde una es la premisa y otra es la conclusión), pero no dice nada de los elementos que la proposición incluye puesto que estamos frente a una lógica extensional, en consecuencia, únicamente un procedimiento de tipo inductivo podrá salvar el problema, este procedimiento es la *recurrencia* o inducción matemática, la cual prueba que si una propiedad es válida para "n" y para "n+1", vale para toda la serie.

Godel también ataca el cálculo proposicional, diciendo que tan sólo es un método para comprobar la verdad del teorema por deducción de sus posibilidades, pero que esa verdad no puede mostrarse sólo por este cálculo, que toma así un carácter secundario. Como conclusión general de estas críticas del cálculo proposicional, tenemos la afirmación de Darbon de que Russell no ha realizado una labor previa de análisis con sus cálculos, sino que cuando surge una dificultad, recién comienza a filosofar, y así ocurre, por ejemplo con el axioma de reducibilidad; con el cálculo proposicional ocurre igual, pues sólo cuando se han presentado las dificultades es que se piensa en los axiomas, cuando ellos debieron ser estudiados antes de construir el cálculo.

Nos toca examinar la teoria del infinito. La escuela que principalmente presentó objeciones a la teoría de Russell fue la escuela Intuicionista, aunque es de indicar que sus conclusiones coinciden en mucho con la teoría aristotélico-tomista. El problema que planteaba la doctrina russelliana, radicaba en el hecho de admitir un infinito actual, que se manifestaba en la realidad de los universales (que no eran otra cosa que las clases infinitas) y en el tratamiento lógico que les daba, lo que confirmaba la existencia del infinito actual. Desde luego que esta doctrina violaba las conclusiones tradicionales, que nunca sostuvieron la existencia de un infinito actual, pues los problemas ontológicos que suponía eran muy graves, principalmente por relacionarse con el Ser por excelencia, por esta razón Aristóteles había distinguido entre infinito actual e infinito potencial; el primero sólo podía ser Dios, mientras que el segundo podía darse en la realidad contingente por cuanto era simple posibilidad de aumento indefinido, en este sentido podía hablarse de una serie de números infinita, ya que nunca podríamos hallar el último término, mas nunca cabía un infinito actual desde que suponía la captación total del infinito en acto. Las doctrinas intuicionistas rechazan el infinito actual y volviendo a la concepción tradicional, sostienen la existencia del infinito potencial como el infinito del que se ocupa la matemática. Por este camino, Weyl, uno de los miembros más destacados de la Escuela Intuicionista, indica la forma como se genera este concepto en las ciencias que estamos estudiando: primero, se comienza por establecer una relación entre dos números, por ejemplo la relación de mayor o menor; como esta relación muestra ser una propiedad de todos los números se le generaliza, y si antes la relación era 3-5, ahora es a-b, estamos en este punto ante un proceso de generalización, donde al no considerarse los números concretos se considera una posibilidad universal (pueden ser cualquier número de la serie), y entonces lo que antes podía comprobarse por una simple experiencia, ya sólo se puede comprobar por un procedimiento lógico apriori; esta circunstancia lleva a una trascendentalización de esa posibilidad ideal, en otras palabras, se le objetiviza, y es aquí donde surgen los equívocos, pues esta posibilidad ideal se llega a tomar como una realidad en sí, y de este modo estamos frente a la substancialización del infinito, y por consiguiente ya no se piensa en un infinito potencial sino en un infinito actual [2]. Como se ve es una objetivización ilegitima, desde que su origen muestra la falta de realidad propia de este concepto, que si llega a tener alguna clase de existencia, lo debe al hecho del método constructivo de las matemáticas y no a su propia esencia. En consecuencia, el infinito

[2] Es decir, que se da el salto de la posibilidad a la realidad.

se presenta como una posibilidad abierta para el trabajo del intelecto, mas nunca como una "esfera cerrada de existencia" [3]; si algunas veces se llega a pensar el infinito como actual, se debe a una necesidad metodológica de poder efectuar algún trabajo científico con él, mas esta no es razón valedera para dar el salto hacia la realidad trascendente. En palabras de Weyl, el infinito que ha construído la Matemática toma la siguiente peculiaridad:

> "Aquí el ser, lo que es, queda proyectado sobre el fondo posible, sobre el fondo de una multiplicidad de posibilidades, abierta a lo infinito y ordenada según su proceso fijo, reproducible a discreción" [4].

Esta concepción del infinito es también compartida por Poincaré, quien niega el infinito actual, desde que el infinito en matemática se reduce a una simple posibilidad de agregar siempre un número a la serie elegida, que de este modo nunca tendrá un fin. Poincaré encuentra en este problema una cuestión lógica que sería la determinante de la aceptación no rechazo del infinito actual, y es ella el carácter comprensivo o extensivo con que quiera apreciarse este problema; en el caso de que predomine el carácter extensivo, se llega fácilmente al infinito potencial, por cuanto tendremos que hacer enumeraciones y en esta labor siempre encontraremos algún elemento que agregar; en cambio cuando es el criterio comprensivo, se tiende a considerar el infinito como un todo al cual se define, y como toda definición tiene un objeto, resulta casi inconsiente el paso a la trascendentalización del infinito; el segundo criterio fue seguido por Cantor y Russell, principalmente éste, quien por su teoría de la denotación vemos que efectivamente sigue ese camino para el tratamiento del infinito. La crítica de Poincaré nos parece bastante acertada, pues efectivamente corresponde a la realidad del sistema de Russell, y en verdad toda actualización del infinito tiene en su base el criterio comprensivo.

Wittgenstein puso el punto final y definitivo a esta teoría del infinito actual. En principio efectúa una distinción entre infinito e ilimitado, pues ambos elementos no son igual cosa; concretamente en las Matemáticas el infinito significa una regla que permite una aplicación ilimitada de los procedimientos lógicos, y si pasamos al campo del mun-

[3] Esta cita, y el contenido de la presente crítica, están tomados de Hermann Weyl: "Los grados de lo infinito". En: Revista de Occidente (Selección y recuerdo). Serie I. Revista de Occidente. Madrid 1950, págs. 74-98.

[4] Weyl: Ob. cit., pág. 79.

do real, veremos que es finito pero que cabe la posibilidad de una explicación ilimitada de su esencia; entonces la falta de limitación es el concepto que se confunde al hablar de infinito actual, ya vemos que el infinito dentro de las matemáticas se reduce a una regla de procedimientos lógicos, y que del mundo mismo no puede predicarse, queda por lo tanto dentro del terreno de la simple posibilidad. Aunque no podamos solidarizarnos del todo con la concepción del infinito en Matemáticas que preconiza Wittgenstein, debemos aceptar la distinción entre infinito e ilimitado, como base para una correcta teoría de lo infinito, pues este concepto desborda el campo puramente lógico y matemático y llega al de la ontología, siendo por lo tanto erróneo, o por lo menos impreciso, hacer generalizaciones como las que presentaron las doctrinas de Cantor y Russell; la falta de limitación siempre se presenta en toda ciencia; mas es conveniente distinguirla del infinito para evitar confusiones que lleven a ilegítimas substancializaciones ontológicas.

La desintegración del infinito actual trae como consecuencia una serie de complejos problemas que resolver, antes de aceptar la existencia del número infinito. Por lo pronto, ya no tiene categoría ontológica, queda como un simple resultado de la conceptuación matemática, ya no es una "idea platónica". A parte de que este problema implicaba un ilícito ingreso en el terreno de la ontología, dentro del campo lógico-matemático también involucra ciertas contradicciones que resolver; así, el número infinito para ser "algo" debe tener un correlato objetivo, de hecho este correlato no se encuentra en la realidad empírica; dentro del campo matemático tampoco lo halla, puesto que sólo tenemos reglas para su construcción, y así el número infinito sigue la suerte del infinito actual: no puede sostenerse que sea algo objetivo. Esta crítica, que pertenece a Darbon, tiene la virtud de poner en relieve una característica de las Matemáticas, la de que muchas veces para progresar en su investigación o para completar su metodología, necesita hacer ciertas construcciones lógicas que sirvan para los fines indicados, estas construcciones pueden abarcar muy bien al número infinito, el cual ha sido necesario para resolver ciertas cuestiones de la Física-Matemática aplicada a la teoría de la física molar; por esto el número infinito no tendría más valor que este.

Las teorías clásicas de la Matemática, o mejor dicho de la Filosofía de la Matemática, no encontraron correcta la definición del número. El defecto que descubren en la definición de Russell ("el número es una clase de clases") es que no se da tal definición, sino simplemente es una indicación de la universalidad de esta noción matemática, además, el recurrir a la coordinación biunívoca equivale a volver al uso de la unidad como base para comprender el número puesto que esa relación es relación de "uno a uno"; de aquí que la definición citada emplee encubiertamente la noción de unidad y de cantidad, que Russell rechazó.

Nos toca examinar ahora un tema muy relacionado con la discusión anterior sobre el infinito: el problema de las paradojas. Vimos en el capítulo correspondiente cual era la forma con que se presentaban y el intento de solución que Russell quizo darles al emplear la teoría de los tipos. Quien primero criticó la posición de Russell al respecto fue Poincaré, el cual consideraba inherente la presencia de estas contradicciones al sistema de Russell, llegando a exclamar alegremente: "¡La Logística no es estéril, engendra la contradicción!" [5]; de acuerdo con el genio extraordinario de Poincaré, su análisis del tema parece haber señalado un camino acertado para la solución del problema, aunque es cierto que este camino no ha sido seguido por las principales líneas logísticas de nuestro tiempo. Para el gran matemático francés, el planteamiento de Russell al respecto no es correcto, pues con la teoría de los tipos no soluciona nada, por cuanto para tener una aplicación correcta supone la existencia de una teoría de los números ordinales, mas ella ha sido creada precisamente para evitar las contradicciones que se presentan cuando se construye esa teoría: en consecuencia hay que buscar la solución por otro camino. Para comenzar, tenemos el hecho de que para referirnos a los conjuntos infinitos debemos emplear un número limitado de palabras, y ya aquí tenemos problemas de significado de las proposiciones ¿traduce una frase finita su contenido infinito?, este punto de partida inevitable ya establece una limitación. En segundo lugar tenemos el hecho de la aplicación de la lógica formal a las matemáticas; este punto es de suma importancia, por cuanto de su naturaleza es que surge el problema de las paradojas; la lógica formal es, según Poincaré: "El estudio de las propiedades comunes a toda clasificación" [6], y al aplicarse a las matemáticas, y muy en especial a los conjuntos infinitos, presenta la cuestión de alcanzar una clasificación tan completa como sea posible, mas es el caso de que esta labor sólo se puede conseguir mediante definiciones predicativas, o sea, que indiquen lo que es el concepto definido; en el caso de las Matemáticas con sus conjuntos infinitos, el pro-

[5] Citado por Bertrand Russell en "Los principios de las Matemáticas". Ob. cit., pág. 17. El original francés citado por Russell, tiene mayor fuerza expresiva que la traducción de M. García Miranda y L. Alonso de "Ciencia y Método" (Espasa-Calpe. Buenos Aires 1947), que es la obra a la que pertenece la cita.

[6] Henri Poincaré: "Ultimos Pensamientos". Edit. Espasa-Calpe. Buenos Aires 1946. Traducción de José Banfi y Alfredo Bessio. Pág. 75.

blema es muy arduo, desde que muchas veces los conceptos matemáticos no se definen predicativamente, sucediendo esto con las clases de Russell, donde por la necesidad de trabajar con símbolos, no siempre se muestra lo que es el concepto. Entonces surgen las paradojas, pues si queremos trabajar con un conjunto infinito debemos clasificar, esto es, conseguir un criterio que indique cuando un elemento le pertenece y cuando no, mas como no hay definición predicativa ese criterio resulta imposible de alcanzar, y entonces aparecen las contradicciones: se nos presenta un nuevo elemento del conjunto, imponiéndosenos la tarea de averiguar si pertenece o no, lo cual rompe la clasificación que hemos hecho con anterioridad, por este motivo es que puede producirse el hecho de un conjunto que se incluye a sí mismo, lo que no ocurriría si supiéramos con anterioridad cuales son los elementos que pueden pertenecerle. En resumen, cuando formamos conjuntos, debemos clasificar a sus elementos, mas esta necesidad supone una definición predicativa y una clasificación; las veces que conseguimos efectuar la clasificación la creemos inmutable, pero como no la definimos predicativamente, no tenemos el criterio de inclusión requerido, y al presentarse un nuevo elemento se produce la contradicción. Se aprecia que la crítica tiene bastante fundamento, y que la teoría de los conjuntos requería un criterio conceptual junto a un criterio puramente logístico; Poincaré no se limitó tan sólo a criticar negativamente la teoría de Russell sino que también intentó hallarle una solución, que sintetizó en los siguientes puntos:

> "1º) No considerar nunca sino objetos susceptibles de ser definidos por un número finito de palabras.
> 2º) No perder nunca de vista que toda proposición sobre lo infinito debe ser la traducción, el enunciado abreviado, de proposiciones sobre lo finito.
> 3º) Evitar las clasificaciones y definiciones no-predicativas" [7].

Creemos que estas tres condiciones, de haber sido seguidas, podrían haber dado mucha luz sobre esta cuestión tan compleja, pues muestra la necesidad de considerar ciertas limitaciones de nuestra capacidad para trabajar con objetos infinitos o ilimitados. Desde luego que a Poincaré faltó el método logístico de trabajo, y por ello estas condiciones quedan tan sólo como un enunciado previo. En cuanto a la consideración de que la lógica formal se reduce a una teoría de la clasificación, debemos mirar esta afirmación con reserva, pues las modernas investigaciones al respecto no confirman ni remotamente esta tesis, la que sí tie-

[7] H. P.: Ob. cit., pág. 98.

ne algún valor, es el mostrar que el problema de las paradojas se debe a la inclusión de términos en un conjunto ilimitado, que por su propia naturaleza nunca llega a conseguir un criterio definitivo de inclusión. Esta consecuencia nos lleva a considerar la anterior afirmación de Poincaré, de que el verdadero método matemático era la inducción o razonamiento por referencia; parece ser que ella sería la única capaz de afrontar el problema, desde que permite hacer generalizaciones con series ilimitadas o infinitas.

La tesis de Poincaré es también sostenida por el intuicionista Weyl, quien afirma que todo conjunto debe poseer una ley capaz de indicar con toda precisión qué elementos le pertenecen y cuáles no. Añade además Weyl, que las paradojas se producen por habérseles considerado a los conjuntos infinitos como una realidad cuando apenas son una mera posibilidad:

> "...como raíz de ellas (las contradicciones) sólo puede señalarse la audacia perpetrada ya en los inicios de la ciencia matemática que un campo de posibilidades constructivas sea tratado como una totalidad cerrada de objetos existentes en sí" [8].

Debemos analizar a continuación, otro de los puntos capitales del sistema de Russell: la identificación que hizo de la Lógica y la Matemática. Como es fácil de comprender, esta tesis causó inmediata reacción en los círculos filosóficos, siendo rechazada por la mayoría de los pensadores; Russell se defendía diciendo:

> "Esta manera de ver ofende a aquellos lógicos que, habiendo gastado su tiempo en el estudio de los textos clásicos, son incapaces de seguir un razonamiento simbólico, y a los matemáticos que aprendieron su técnica sin preocuparse de averiguar el significado de la misma o su justificación" [9].

Russell ha hecho alusión a los "textos clásicos", que él identifica con la Lógica Aristotélica, y es precisamente esta corriente tradicional la que niega con mayor énfasis que esas dos ciencias puedan identificarse.

Para esta escuela la diferencia es clara, desde que la Matemática tiene por objeto la cantidad y la Lógica los actos de la razón sobre el conocimiento reflejo, así el P. Selvaggi S.J. afirma:

---

[8] Weyl: Ob. cit., pág. 90.

[9] B.R.: "Introducción a la Filosofía Matemática". Ob. cit., pág. 270.

> "Pero después de todo lo que hemos visto en este capítulo sobre el objeto de la matemática, no hace falta una larga discusión para llegar a la conclusión de que este intento es imposible. La cantidad, objeto primario de la matemática, es irreductible al objeto de la lógica, las *secundae intentiones*" [10].

Se ve que la diferencia es notable, por cuanto no hay comunicación ontológica entre ambos objetos. La escuela admite una estrecha vinculación entre ambas ciencias, mas desde un punto metodológico y sin que jamás puedan llegar a la identificación; en este campo se establece una relación en la cual la matemática depende de la lógica, desde que esta debe fundamentar su proceso racional para que la primera sea efectivamente ciencia, por esta razón la matemática debe ser lógica, razón a la que se añade el hecho de que el método matemático es esencialmente deductivo, y dentro de esta especie, es método silogístico:

> "El razonamiento matemático, por tanto, no es más que un razonamiento matemático en forma silogística, compuesto de ordinario por muchos silogismos encadenados de modo diverso, muchos de los cuales se reducen a entimemas" [11].

En consecuencia, la relación lógico-matemática es puramente metodológica. Aquí aclara el P. Selvaggi S.J., que existe una corriente neo-escolástica que establece una mayor vinculación entre estas dos ciencias gracias al hecho de que ambas tienen por objeto los entes de razón con fundamento *in re*. Esta corriente permitiría una cierta identificación ontológica entre las dos ciencias; es de notar que esta opinión no es compartida por toda la escuela, ya que la mayoría distingue entre el ente lógico, verdadero ente de razón, y el ente matemático que ha sido abstraído de la realidad, lo cual, según ellos, es ya motivo suficiente para distinguirlos.

La Escuela Intuicionista rechaza también la identificación de lógica y matemática. En esta escuela, la matemática tiene una innegable base empírica, pues de la experiencia sensible se han obtenido los conceptos matemáticos, pero como la conceptuación no se detiene en este punto de partida sino que prosigue construyendo, se llega a un plano puramente ideal, donde los conceptos pueden surgir en base a construcciones del todo abstractos, por este motivo es que en las Matemáticas Superiores

---

[10] R.P. Felipe Selvaggi: "Filosofía de las Ciencias". Sociedad de Educación Atenas. Colección "Razonemos Nuestra Fe". Madrid 1955. Traducción del italiano por Antonio Alvarez de Linera Grund. Pág. 127.

[11] R.P. F. S., S.J.: Ob. cit., pág. 176.

el origen empírico pasa desapercibido, puesto que en el plano ideal en que trabajan las leyes lógicas tienen una vigencia total. Además, la matemática tiene una base o fundamento último que se apoya en la intuición y no en la razón o prueba lógica, por este motivo el fundador de la Escuela creía que la intuición kantiana del espacio podía fundamentar correctamente esta ciencia. De otro lado, tenemos el hecho de que la Matemática desborda el terreno lógico, pues para una fundamentación correcta de esta ciencia es necesario prescindir del principio del tercio excluído, lo cual es evidentemente una prueba de la no reducibilidad de la matemática a la lógica. Por último, agreguemos dos pruebas que contradicen la tesis logicista; la matemática tiene una base netamente empírica, desde que al nacer esta ciencia, la finalidad que se buscaba era medir y calcular la tierra, y aún en nuestro excepcional progreso matemático, esta ciencia no aparece como un estudio en sí mismo, sino que siempre tiene la finalidad de aplicarse a la realidad, baste el ejemplo de que la Aritmética no-comunicativa, que parece ser el máximo de abstracción, tiene su campo de aplicación en la física nuclear. Lo que ha sucedido, es que la Matemática creció, mas para que siguiera un camino científico, debía seguir un método apropiado, este método fue la lógica.

Mencionemos para finalizar este punto, la opinión de Ludwing Wittgenstein, uno de los precursores del Empirismo Lógico, y que fue también el discípulo de Russell, aunque siguió una línea distinta. Para Wittgenstein lógica y matemática son ciencias diferentes, por cuanto la lógica se ocupa de tautologías y la matemática de ecuaciones. Por tautologías se entiende las proposiciones que son incondicionalmente verdaderas [12], describiendo, además, el mundo. La ecuación matemática indica cuando dos proposiciones tienen igual significado, y por este camino se puede realizar el cálculo matemático y fundamentar toda esta ciencia. En consecuencia existe una diferencia total entre las dos ciencias; mas en Wittgenstein el problema sólo parece resuelto a medias desde que en varias partes de su obra principal [13] afirma que la "Matemática es un método de la lógica", lo cual implicaría un cierto regreso a la tesis de Russell.

---

[12] Wittgenstein indica que las proposiciones que poseen esta peculiaridad son las proposiciones elementales, entendiéndose por tales las que afirman la existencia de un hecho atómico (un grupo de cosas).

[13] Esta obra es el célebre "Tractatus Logico-Philosophicus". Empleamos la traducción castellana de la obra hecha por Enrique Tierno Galván, y publicada por Revista de Occidente, Madrid 1957.

Las críticas expuestas forman en conjunto, el cuerpo principal de las hechas al sistema lógico de Russell. Falta conocer algún comentario que englobe a toda la doctrina. Al respecto, la crítica más conocida apunta que el sistema, por una excesiva esquematización, termina por convertirse en una mera gramática del discurso deductivo, pues en verdad las reglas lógicas que se indican sólo permiten un manipuleo de símbolos para calcular relaciones entre premisas, convirtiéndose así en un simple método para verificar teoremas, y esto, quedándose en el plano puramente formal. Esta última circunstancia constituye un grave defecto, desde que olvida la base objetiva de los teoremas y proposiciones de la ciencia a la cual pertenecen. La crítica tiene una efectiva base real, desde que el sistema lógico al aplicarse a una ciencia, debe buscar la naturaleza del objeto sobre el que deba trabajar, pues de no ser así, sólo podrá indicar los defectos externos del sistema, sin procurar la debida penetración en los problemas esenciales. Quizá este olvido excesivo del objeto de la ciencia que se ha de analizar, ha sido el origen de la identificación de la lógica y la matemática.

También se ha criticado al sistema russelliano, el investigar exclusivamente el método deductivo, cuando dentro del campo metodológico existen otros procedimientos científicos con igual o mayor valor como son la dialéctica y la inducción [14]. Es claro que Russell sólo pretendió un método para analizar la matemática, y de aquí su preferencia por el sistema deductivo, pero sí, como más tarde lo evidenció, su intento fue construir una lógica universal que se aplicara a todo saber científico, no debió olvidar otros métodos. Mas esta crítica olvida el hecho de que Russell reduce la inducción al método deductivo, considerando a éste último como el método por excelencia; en conclusión, dentro del sistema de Russell no se da tal olvido. Desde luego que esta posición es bastante discutible.

Con las críticas anteriores, podemos cerrar el capítulo de los comentarios al sistema lógico, faltándonos tan sólo encarar las críticas al fundamento filosófico.

En cuanto a la base filosófica del sistema lógico, el problema aparece bastante simplificado, desde que el punto capital de éste, la realidad de los universales y las relaciones, fue negada por el mismo autor. De acuerdo a esta circunstancia, puede parecer superfluo exponer las críticas al respecto, pero una breve exposición de esos comentarios tal vez ayude la clarificación del problema. En este sentido, podemos decir que la tesis russelliana fue inmediatamente atacada, no sólo por haber sido formulada en una época donde el positivismo aún no ha-

[14] La crítica pertenece a Eli de Gortari.

bía acabado de morir, sino que por cuanto casi todos los pensadores veían en ella un retorno al platonismo, y ello equivalía a olvidar los logros de la Filosofía Moderna. En general se veía un sofisma en la tesis de Russell, desde que, se decía, cuando se trabaja con ciencias tan abstractas como la lógica y la matemática, hay siempre la tendencia de substancializar los entes que sólo existen en nuestra mente, pues encontramos en ellos tal rigor científico, que se llegan a considerarlos como la única y verdadera realidad pues carecen de las contradicciones que vemos en el mundo de la experiencia sensible, con todo esto no se debe olvidar que estamos frente a meras abstracciones que no son más que eso: abstracciones.

Desde otro punto de vista, colabora también a la confusión del tema, la creencia que todo concepto tiene un objeto real, y aún en el caso de que el concepto sea totalmente abstracto, debe existir fuera de la mente un objeto que le sirva de correlato, mas aquí se olvida el hecho de que todo concepto tiene un origen empírico, y por lo tanto la experiencia es el único criterio a emplear para decidir este punto.

En esta cuestión de los universales y las relaciones, Ogden y Richards han realizado una investigación de excepcional importancia, poniendo al descubierto muchas falacias que llevaban a la creencia de un nuevo tipo de ser en el logicismo. Parten los citados autores de un análisis del significado de los símbolos, y así determinan la no existencia de entes como los universales y las relaciones; basan esta crítica en la circunstancia de que nuestro conocimiento parte de la captación de ciertos signos, que poseen un significado que debemos interpretar; para efectuar este proceso de interpretación, estamos en la necesidad de aislar el signo captado, pues de hecho nunca se presenta al conocimiento el signo sólo, sino antes bien, aparece dentro de un conjunto, dentro de una "estructura" como dice la psicología de la forma; de aquí la necesidad de abstraerlo de ese conjunto, lo cual supone una cierta labor lingüística pues precisamos de un símbolo que indique el signo por interpretar y al mismo tiempo de otros símbolos que señalen el resto de la estructura, pero no de modo analítico como sería en el caso del signo por interpretar, sino en forma sintética para evitar una difusión de la atención. Estos símbolos que sintetizan la estructura dentro de la cual se presente el signo que nos interesa, suelen ser las relaciones y los universales; por ejemplo, "aquí está un perro" tiene un signo por interpretar "perro", más como ese animal no se presenta aislado en la realidad, "aquí" resume toda la estructura real circundante. Y con esto estamos en condiciones de apreciar el error en que cayó Russell, pues sólo los signos con significado tienen un referente, que de hecho será, en el ejemplo, un can, pero los símbolos sintetizantes no poseen un referente, éste sólo estaría dado por una totalidad que queremos excluir; en consecuencia, la tesis russelliana de partir de un análisis del lenguaje para llegar a la existencia de seres llamados relaciones y universales, está errada; estas palabras no tiene correlato objetivo de ninguna clase [15].

Las críticas anteriores han dejado muy poco de la tesis de Russell, y su verdad parece ser confirmada por el hecho de que el autor mismo la rechazó, mas como veremos más adelante, el problema no ha quedado del todo resuelto, pues filosofías como las de Hartmann y la de Husserl muestran otro ángulo del problema. Además, de que la circunstancia del rechazo de Russell está determinada por dificultades de *trabajo lógico*, lo que quizá no sea motivo para rechazar una tesis *ontológica*.

Finalmente tenemos otra crítica negativa, referente a la razón y la intuición. Como sabemos Russell desdeñó la intuición desde que era incapaz de fundamentar el extraordinario progreso de la Matemática, de aquí su intento de construir un sistema donde la razón diera los últimos fundamentos y en forma definitiva, mas también vimos como este intento fracasó pues siempre quedaron proposiciones por demostrar y contradicciones por resolver. Esta es la razón por la cual se considera al logicismo como el mejor exponente de los límites de la intelectualización, por cuanto siempre queda algo irreductible a la demostración lógica, por ello se piensa que un sistema racional no puede ir más allá de una aclaración de los contenidos empíricos que se presentan al conocimiento (esta crítica supone la génesis empírica del conocimiento), pero que no puede llegar hasta el extremo de convertirse en una fundamentación única. Como de todos modos algo escapa a la razón, la intuición cobra de nuevo importancia. Donde la razón termina, comienza el método intuitivo, y es en el campo de los primeros principios donde cobra su máxima vigencia. Se quizo rechazar el método intuitivo por cuanto fatigaba a la imaginación, pero los logicistas terminaron fatigando al pensamiento discursivo, dicen los críticos del sistema de Russell, y parecen decir verdad.

Hasta aquí hemos presentado la crítica negativa del sistema, y en verdad que ella deja bien poco en pie. Quédanos para terminar el capítulo, referirnos a lo positivo que se haya visto en Russell; esta parte parece ser muy restringida. En este sentido se le reconoce que ha efectuado un verdadero análisis del lenguaje científico, en especial dentro

---

15 C. K. Ogden, I. A. Richards: "El significado del significado". Editorial "Paidos". Buenos Aires. 1954. Traducción del inglés por Eduardo Prieto.

del aspecto del simbolismo y la sintaxis que debe seguir para responder a las necesidades que se presentan en este terreno. Igualmente se admite que, gracias al sistema lógico, ha conseguido señalar el camino para una ampliación del concepto de número que requieren las Matemáticas de la actualidad, mas esto, desde un punto de vista metodológico. Pero donde quizá esté el mayor aporte de Russell, es en lo referente a la Lógica misma, puesto que ha conseguido ampliar el horizonte de aquella; así vemos que ha conseguido dar un extraordinario desarrollo a la teoría lógica de las relaciones [16], aumentando material para su estudio; también ha logrado una ampliación del estudio del silogismo hipotético, y sobre todo, inició el estudio de la lógica de clases, que antes de él sólo había sido estudiada de manera accidental. Finalmente, al incorporar de modo definitivo el símbolo a la logística, habrió un camino de posibilidades infinitas a la generalización lógica. Por nuestra parte, creemos que estos logros bastan para prestigiar cualquier sistema científico.

[16] Aunque este tema ya había sido adelantado por Pierce y Sroder.

CAPITULO VI

DISCIPULOS E INFLUENCIAS

Habiendo concluído la exposición del sistema de Russell, así como las críticas hechas al respecto, nos toca hechar una breve ojeada a los discípulos y a las influencias que haya dejado Russell.

En este punto debemos hacer, una vez más, un preámbulo para precisar la orientación que seguiremos. Los continuadores de Russell, han sido muchos, habiendo trabajado especialmente en la empresa de reconstruir el sistema lógico, casi destruído por la severa crítica que se le hizo. Por este motivo hemos seleccionado dos de los continuadores de acuerdo al siguiente criterio: ver aquellos lógicos que pusieron su meta en la reconstrucción de *todo* el sistema, puesto que muchos de los continuadores, como Sheffer y Nicod, siguen la línea de Russell, mas no vacilan en rechazar algunos puntos que suponen débiles, terminando por construir un sistema personal; en cambio Chwistek y Ramsey presentan mayor fidelidad al autor, y si tienen algunas variaciones, ellas no determinan un sistema diferente como resultado del trabajo. En base a estas razones, sólo vamos a trabajar a los dos autores últimamente nombrados.

Chwistek encuentra dos defectos principales en el sistema de Russell: primero, una simbólica insuficiente, cuyos elementos son vagos, inconsistentes, y en conjunto carecen de reglas generales para guiarse en el empleo de ellos; segundo, los axiomas no son lógicos, pues no se derivan de nociones verdaderamente lógicas, además la teoría de los tipos requiere una reconstrucción para cumplir su cometido. Chwistek resolverá estos problemas, estructurando una semiótica, y buscando sustitutos de los axiomas conocidos, lo cual permitirá reconstruir la teoría de los tipos; el resultado final de su intento será una aproximación del logicismo al formalismo, y también el mantenimiento de una de las tesis principales: la identidad de la lógica y la matemática.

Dijimos que Chwistek estructura una semiótica, para ello parte de un postulado, que el símbolo es idéntico a la cosa simbolizada, y en consecuencia una correcta sintaxis de ellos, con reglas de admisión y desarrollo son suficientes para fundamentar una ciencia cualquiera. En el caso de la Lógica y la Matemática, una estructura sintáctica de símbolos encaminada en cierta dirección, permite fundamentar correctamente esas dos ciencias. Con las reglas técnicas que presenta en sus obras, piensa que son suficientes para cumplir esta misión que se le ha encomendado, y así superar los defectos de Russell.

La reconstrucción de los axiomas y la teoría de los tipos son labores más complejas. Comienza esta tarea aclarando que el axioma de Reducibilidad no es un axioma lógico de existencia, al igual que el de Infinito, por lo cual ya salen del terreno lógico; el axioma de Reducibilidad es sustituído por el llamado de "utilidad", que consiste en proporcionar ciertas reglas para la construcción de funciones (equivalentes a las funciones proposicionales de Russell), donde se considera que dos de ellas son idénticas cuando tienen el mismo tipo, y todo este procedimiento se apoya en el hecho de que dos funciones pueden tener igual tipo cuando tienen iguales símbolos sumados a las variables, esta circunstancia supera las dificultades presentadas por el axioma de Reducibilidad y permite distinguir los diversos tipos, estableciendo de nuevo su jerarquía.

Con todo el aparato lógico arriba indicado, se puede reconstruir el sistema según opina Chwistek, mas la crítica general no ha compartido esta opinión, y por ello se critica especialmente la teoría del símbolo, ya que identificar símbolo y objeto simbolizado es confundir dos realidades diversas, desde que el símbolo sólo denota un aspecto del objeto y nunca su completa realidad. El reemplazo del axioma de Reducibilidad fue acogido con entusiasmo, pero como no contaba con una semiótica adecuada el intento de Chwistek resultó fallido. Finalmente, Chwistek quiso restuarar la tesis de Russell sobre la identidad de la lógica y la matemática, puesto que ambas ciencias requieren un fundamento común: la semiótica; desde luego que esta opinión también fue criticada, por cuanto involucra una total formalización de ambas ciencias.

El segundo intento de importancia en la reconstrucción del sistema russelliano, lo realiza Frank Ramsey. Este pensador, inglés de nacimiento, hace un estudio exhaustivo de los fundamentos de la Matemática, hallando que ninguna de las tres escuelas existentes (logicismo, intuicionismo y formalismo) dan una solución satisfactoria, pero la teoría de Russell posee ciertas ventajas que no poseen las otras como es su estricto rigor lógico, mas para poder lograr su intento final debe corregir muchos de los puntos débiles que presenta.

¿Cuáles son los puntos débiles de que habla Ramsey? Antes que nada está el tratamiento que da Russell a la identidad, pues la considera un elemento lógico, y así la emplea en las funciones proposicionales mediante el axioma de Reducibilidad, llegando a sostener por este motivo, que dos cosas que tienen sus propiedades iguales también lo son ellas, mas es el caso de que Wittgenstein demostró que la identidad no es una noción lógica, primero, por cuanto el signo de identidad que se usa en logística no pertenece al simbolismo propio de esta ciencia, además que la identidad no es una relación que se entre objetos, ya que en lógica sólo hay identidad de signo u objeto pero nunca de relaciones. En el sistema de Russell este signo no está definido y en consecuencia no puede aplicarse a las funciones proposicionales que representan clases infinitas. Otra de las dificultades que encuentra Ramsey, es la teoría de los tipos; esta teoría, como ya lo viéramos, tenía por finalidad evitar las paradojas que se habían presentado en el sistema, mas se dio el caso de que ellas desaparecían del sistema para reaparecer en la teoría; por lo tanto ella resultaba inútil; Ramsey considera a la teoría de los tipos como el único medio de evitar las paradojas, pero también debe ser reformada.

Para remediar los defectos del sistema de Russell, Ramsey principia por eliminar la noción de identidad de la logística por cuanto en una función proposicional ya no será necesario decir que las variables tendrán la relación indicada cuando tienen sus propiedades iguales, sino que bastará para que ellas posean la relación, que al reemplazar sus valores resulte en ambas una proposición. Esta situación es posible por el empleo de la teoría de Wittgenstein acerca de la proposición, ya que ella afirma que de las proposiciones atómicas podemos formar proposiciones elementales que indican sólo un aspecto de ellas y que son capaces de representarse por símbolos; en el caso de las funciones proposicionales, cada variable indica una propiedad de la proposición atómica y por ello no precisa hablar de la "identidad de propiedades de las dos clases". Con esta reforma, el axioma de Reducibilidad que tantas cuestiones había suscitado, pasa a ser completamente innecesario, y así una de las principales dificultades del sistema queda superada.

Hemos mencionado la teoría de la proposición de Wittgentein, y ella no sólo sirve para una corrección del tratamiento de la identidad, sino también, en base a la corrección anterior, rehacer la teoría de los tipos. Con las nociones de proposición atómica y elemental, ya tenemos una base para establecer una jerarquía de tipos, la que se va aumentando cuando aparecen las funciones formadas en base de esas proposiciones (funciones de individuos) y posteriormente las funciones de funciones. Así, siempre que queramos ver a qué tipo pertenece una proposición, bastará analizar sus componentes y así podremos determinar si es una función de funciones, de individuos, etc.

Para finalizar su análisis, Ramsey recurrió a la noción, también sostenida por Wittgenstein, de tautología como elemento esencial de la lógica. Aplicando este criterio a los tres axiomas del sistema de Russell, comprobó que ni el axioma de Reducibilidad ni el del Infinito eran tautologías, por lo cual creyó conveniente suprimirlos, y con ellos las dificultades que presentaban. Tan sólo el axioma de Multiplicación quedó admitido mas con la nueva definición de clases que dio Ramsey: clase es cualquier conjunto de cosas homogéneas de un tipo no necesariamente definibles por una función; como conclusión final, debemos aceptar sólo el axioma de la Multiplicación mas con las correcciones antes dichas.

El intento de Ramsey no tuvo un resultado muy feliz, pues las críticas hechas a Russell pudieron volverse contra él luego de un breve análisis. Así, se llegó a comprobar que las dificultades del infinito actual se reproducían en su intento de mejora.

Hasta aquí los esfuerzos de los continuadores principales de Russell, veamos a continuación qué influencia ejerció el sistema de este autor en el pensamiento lógico y filosófico.

En el terreno lógico, la influencia ha sido grande. Podemos decir que el esquema general de la logística que planteara Russell, ha sido conservado por los logicos posteriores; al hablar del esquema, hacemos referencia tan sólo a las líneas generales del sistema y no a sus elementos de detalle, como serían los tres axiomas, sino que consideramos al sistema como un todo, en este sentido Russell señaló el camino a las investigaciones posteriores. Los cálculos lógicos, el simbolismo, etc., han sido mantenidos y perfeccionados por los investigadores posteriores a Russell.

En el aspecto filosófico la influencia del sistema lógico de Russell ha sido más grande aún. La logística ruselliana se ha convertido en uno de los métodos por excelencia del análisis filosófico; en este sentido, es la escuela del neopositivismo quien parece haber explotado mejor estas posibilidades, pues reconociendo su parentezco con Russell, han llevado a la logística al estudio exhaustivo de los problemas tradicionales de la Filosofía, llegando a erigir un verdadero sistema filosófico con sus resultados. Ludwing Wittgenstein, alumno de Russell, fue el primero en realizar esta aplicación concreta del método logístico, plasmando sus conclusiones en el célebre "Tractatus Logicus-Philosopricus" que más tarde había de servir de punto de partida al empirismo lógico una de las primeras manifestaciones del neopositivismo. Actualmente esta escuela es una de las principales en el medio filosófico mundial, tanto por la fertilidad de sus producciones, como por las investigaciones realizadas principalmente en el campo logístico. Como resultado del empleo de la logística en el estudio de los problemas de la Filosofía, se ha llegado a una concepción especial de la realidad, donde el dato primero son los hechos empíricos individuales (esta noción también la deben los neopositivistas a Russell), los cuales se van organizando gracias a las tautologías matemáticas, y esta organización se rige por las leyes lógicas; como resultado de esta estructuración del conocimiento, surge un lenguaje científico, y es tarea de la Filosofía, ayudada por la logística, de analizar las consecuencias y verdades de este lenguaje que traduce la estructura de la realidad.

Es evidente que el sistema lógico de Russell, pese a sus inevitables deficiencias, ha tenido un influjo digno de mención en la Filosofía Contemporánea.

CAPITULO VII

CONSIDERACIONES FINALES

Hemos llegado al término del análisis del sistema lógico construído por Bertrand Russell, pudiendo apreciarse sin mayor dificultad que constituye uno de los esfuerzos más grandes del pensamiento contemporáneo para alcanzar una estructuración científica del conocimiento, desde que ya es evidente que el resultado final rebasa los límites que el deseo inicial del autor le pusiera. Efectivamente, ya no estamos en presencia de un método para volver a fundamentar las Ciencias Matemáticas, sino de toda una doctrina lógica que interesa a los diversos campos de la filosofía general; por este motivo, debemos, como punto final de este estudio, precisar, dentro de nuestras limitaciones, las consecuencias filosóficas que importa la aparición de lo que podríamos llamar sin temor a exageraciones, la lógica russelliana.

1) Nuestro primer paso ha de estar encaminado a la caracterización de la lógica de Russell: qué clase de lógica es. Ya en este punto tropezamos con una dificultad, por cuanto sólo en nuestros días se habla de "lógicas", tomando el sustantivo en sentido plural, por cuanto las doctrinas clásicas (griegas, medievales y aún modernas) siempre consideraron que existía sólo la "lógica", llegando apenas a considerar como simples corrientes las que dieran un mayor o menor desarrollo a uno de los temas que ella contenía, así por ejemplo, tenemos la "lógica inductiva de Bacón", o la lógica deductiva de la Escolástica, pero los dos adjetivos corresponden a los elementos que siempre han pertenecido a la lógica de Aristóteles, desde que ambos tipos de raciocinio, el inductivo y el deductivo, ya se encontraban considerados por el Estagirita. Al surgir las corrientes contemporáneas de la logística, ha quedado en pie un problema, y es él, descubrir la relación entre el concepto clásico de la lógica y el contemporáneo. En verdad los intentos

al respecto son muy pocos, resaltando entre estos el esfuerzo de Husserl, seguido por García Baca; esta teoría considera que todo el desarrollo de la lógica, clásica o contemporánea, ha partido de una forma apofántica inicial la considerada en la fórmula del juicio: *S es P*; por este camino, podemos construir la lógica de las significaciones, si sólo consideramos únicamente las categorías de sujeto y predicado, luego, si atendemos a las propiedades de verdad o falsedad de la proposición, tendremos las lógicas de las formas canónicas, en cambio tendremos, si nos fijamos en los objetos a los que alude el sujeto de la proposición, la lógica objetal que, mediante ciertas operaciones, nos permite llegar hasta la lógica probabilística; en síntesis, este intento de caracterizar la lógica en vistas a unificar las diversas ramas de su desarrollo, parte de la fórmula básica, y primera (por lo menos de la lógica que sigue la corriente de Husserl) *S es P*, en otras palabras en la fórmula de la proposición o juicio, encontramos el germen de todo el desarrollo de la lógica contemporánea. ¿Cabría aplicar esta caracterización al sistema de Russell? De hecho, García Baca en su obra "Introducción a la Lógica Moderna" así lo hace, si bien los elementos componentes del sistema no están tomados en conjunto sino en forma separada, lo que, en última instancia, impide un juicio total.

La caracterización husserlina tiene un fundamento real y exacto, por cuanto parte de la forma lógica primordial como es el juicio, mas quizá quepa algún criterio más general, y que también convenga más a nuestro propósito. Así, dentro de los elementos que componen la lógica formal, podemos señalar dos que constituyen los pilares fundamentales de toda esta rama del saber, por cuanto todos los demás elementos los contienen necesariamente; nos referimos al *contenido* y a la *extensión*. Efectivamente, tenemos que el concepto los posee como determinante de su constitución; los juicios se agrupan y poseen diversas propiedades, gracias a estos dos elementos y finalmente, también los raciocinios las contienen dentro de su estructura general. En consecuencia, podemos considerar a la extensión y al contenido como las dos nociones básicas para la estructura de cualquier sistema lógico, y aún de la lógica misma; por estas razones es posible llegar a una conclusión: el contenido y la extensión, siendo nociones primeras en el campo de la lógica, pueden ser consideradas como un criterio general para caracterizar la evolución de la lógica misma, y, por tanto, para agrupar a los sistemas que van surgiendo en esta ciencia.

Gracias a nuestra consideración anterior, es factible conseguir el ángulo de apreciación que necesitábamos para examinar el sistema de Bertrand Russell.

Russell pertenece a una época en la cual la lógica comienza una evolución de sorprendentes proyecciones, por cuanto alcanza métodos y descubrimientos que le han de permitir llegar a conclusiones extraordinarias, no sólo dentro de su propio campo sino en el de la filosofía general. Esta evolución de la lógica puede ser encuadrada dentro de la pareja de conceptos a que hacemos mención anteriormente: la evolución ha tomado una dirección comprensiva (o del contenido) y una dirección extensiva; la primera corresponde, como ya se mencionó en un capítulo anterior, a la linea de Husserl y posteriormente a la de Hartmann; esta dirección tiende a lograr una ontología de la lógica, es decir, que se aboca más a la solución del ser de ella, pues no otra cosa son las conclusiones de Husserl sobre ontología formal a partir de la lógica, y la teoria de las categorías en Hartmann. El análisis del contenido siempre tiene que desembocar en un estudio de este tipo, por cuanto pone el punto de gravedad de la investigación en el sentido cualitativo de la realidad que estudia, busca lo que es propio y diferencial de ella y esto siempre se revela en el ser mismo. En cambio un análisis extensivo nos pone en contacto con el lado cuantitativo, (número de objetos que caen bajo un concepto) y es precisamente en este aspecto, en el cual vamos a incluir, según nuestra opinión, a Bertrand Russell.

Nos parece bastante claro que la teoría lógica de Russell es una teoría extensiva, ya que no ha intentado llegar al ser de la lógica sino que ha puesto el acento en el lado operativo de ésta. Recordemos que el intento de Russell es construir una lógica capaz de permitir la reconstrucción de las ciencias matemáticas, y para ello recurre a la adopción de elementos matemáticos como es el cálculo lógico; es evidente que no puede hablarse de un cálculo sin tener ciertos presupuestos extensivos, es decir, de una consideración cuantitativa. Aquí tenemos que efectuar una aclaración, puesto que al hablar de cantidad estamos chocando con una de las afirmaciones básicas del autor, que la matemática ha dejado de ser cuantitativa, idea esta que mantienen la totalidad de los matemáticos actuales. Cabría añadir que las investigaciones filosóficas de Hegel y Alexander, han llevado a primer plano lo que podríamos llamar la consideración cualitativa de la cantidad, lo cual coincide con la naturaleza del moderno desarrollo de las diversas ramas de las matemáticas (teoría de los grupos, álgebra abstracta, por ejemplo). Esta circunstancia nos indica que podemos encarar la noción de cantidad bajo aspectos distintos a los tradicionales, pues es posible considerarla, ya no como algo que aumenta y disminuye, sino como una continuidad de subordinaciones sucesivas de objetos, algo comparable a una sucesión de muchos elementos donde es factible hallar un primero y ubicar también a uno cualquiera. Esta nueva noción coincide con dos tipos de investigaciones actuales: primero, con el concepto de extensión en la lógica fenomenológica de Husserl, y también con la idea de sucesión de números en la Aritmética contemporánea. Si tomamos en cuenta esta nueva consideración de la cantidad, es que podemos calificar la lógica de Russell como una lógica de la extensión, pues resulta innegable que todo su sistema evidencia una continua subordinación de elementos mediante su teoría deductiva.

El criterio exclusivamente extensivo de la lógica no había sido analizado hasta que comenzó el movimiento logístico, por cuanto anteriormente había predominado la visión comprensiva o del contenido que había señalado Aristóteles. Mas cuando la matemática adquiere su extraordinario desarrollo, al igual que la física, se va comprendiendo que una lógica de ese tipo resulta insuficiente, y es por esto que se busca un método de análisis que supone necesariamente un proceso operatorio; por este motivo se va desarrollando el criterio extensivo, ya que toda operación analítica nos lleva a subordinaciones sucesivas de conceptos, como se evidencia en el cálculo y otros elementos de la Logística. Russell comprendió claramente la situación y construyó un sistema de lógica casi exclusivamente extensivo, como se comprueba de la excepcional importancia que da a los cálculos que forman su contenido. He aquí la caracterización que nos parece más acertada en cuanto al presente sistema; de hecho el lado extensivo de la lógica está presente, y al mismo tiempo ha permitido una aclaración de lo que constituye la noción de cantidad, pues como hemos visto, la ha separado de la idea de más y menos, quedando en el simple plano de la idea de sucesión; este concepto de sucesión es el que ha permitido el empleo del cálculo en la lógica, cosa que Russell apreció con toda claridad, marcando así el camino que habrían de seguir todos los posteriores estudios lógicos. Sin embargo, es de notar que esta orientación no es del todo suficiente para un completo desarrollo de la lógica, por cuanto ella pone el acento principalmente en el carácter operatorio quedando reducida a un método de análisis, mas este aspecto requiere de una complementación, sobre todo en el lado de una teoría del objeto lógico, labor que jamás podrá conseguirse sin un llamado al contenido comprensivo de la lógica, esto es, a la apreciación cualitativa.

2) Al mencionar anteriormente la necesidad de proseguir los estudios comprensivos de la lógica, llegamos a un terreno donde Russell dejó entrever una posibilidad extraordinaria. Como ya sabemos, cuando nuestro autor construye su sistema lógico, lo hace partiendo de un su-

puesto ontológico: la realidad de los universales y las relaciones. Dijimos también que mientras Russell mantiene esa unidad (lógico-ontológica) su sistema no cae en un formalismo como sucede cuando, por ciertas dificultades metodológicas y una aproximación al empirismo, rechaza la teoría de los universales y las relaciones. Esta circunstancia pone en evidencia una necesidad imperiosa del moderno desarrollo de las ciencias llamadas ideales: la necesidad de una teoría de los objetos ideales. Efectivamente, el extraordinario progreso de las investigaciones en el campo de la lógica, la matemática y la axiología, han descubierto una nueva región de la realidad, y se ha trabajado con gran interés en este campo, construyendo teoría tras teoría, mas olvidando un punto de excepcional importancia, como es el de la formulación de la teoría general de todo este sector de lo real. Queremos hacer en este punto una aclaración necesaria; nosotros no hablamos del ser ideal, ni de una ontología, tan sólo de una teoría de los objetos ideales, entendiendo por tales a todo término del conocimiento que no se de en el espacio ni en el tiempo, en buena cuenta nos referimos a la ontología formal de que habló Husserl. Es desde todo punto evidente, que si queremos construir sistemas científicos, estos deben suponer una teoría del objeto sobre el cual versan, ya que de no ser así, estaríamos construyendo sistemas de conocimiento que carecen de una base sobre la cual apoyarse. Esta circunstancia está clara cuando Russell sostiene la realidad de los universales, pues ellos son el substentáculo de la logística pero si ese apoyo desaparece, nos quedamos en el campo de las formas puramente abstractas y vacías. Desde luego que esta tesis lleva a problemas de notable complejidad, como es, por ejemplo, la cuestión del ser ideal, pero no queremos entrar a discutirla, simplemente enunciamos que en la actualidad, como lo muestra el sistema russelliano, estamos trabajando con un nuevo tipo de objeto, el que posee una estructura propia y un campo de investigación estrictamente delimitado, y por consiguiente es imprescindible la formulación de teoría general sobre su naturaleza; esta necesidad es independiente de la pregunta sobre la relación que pueda tener el objeto ideal con el ser real, puede que se una abstracción o que pertenezca a una región ontológica diferente, pero el hecho innegable reside en la posibilidad de originar sistemas de conocimiento completos y perfectamente científicos, y esta circunstancia basta para pensar en una teoría general. De poder construirse esta especie de ontología formal, es posible que los sistemas lógicos se salven del puro formalismo vacío, ya que tendrían una base en que apoyarse, al menos, esta es la consecuencia que permite extraer el sistema russelliano.

3) Las afirmaciones citadas nos llevan a otro punto de especial importancia para Russell, es su afirmación de que todo conocimiento tiene un objeto que es. Esta ha sido una de las bases en que se sustentó para llegar a su tesis de la realidad de los universales, y también el punto débil que encontraron sus adversarios para refutarla. Mas la afirmación de Russell no estaba descaminada, por cuanto, casi por la misma época, Husserl expresaba su teoría del objeto formal; esta ha sido una circunstancia muy poco tomada en cuenta por los pensadores contemporáneos, ya que la mayoría cree que sólo existe una clase de objeto, el objeto real, aquel que proviene de los sentidos, mas es el caso de que existe una percepción intelectual, la que nos revela una realidad al margen del espacio y del tiempo, y ella es el objeto formal de Husserl; de aquí pues, que Russell estuvo en lo cierto al efectuar su afirmación: existe otro tipo de objeto de conocimiento, diferente al que proviene de los sentidos. Una vez más queda en evidencia la necesidad de construir una teoría de este tipo de objetos.

Cabe preguntarnos ahora, el por qué del abandono que Russell hizo de su teoría sobre la realidad de los entes ideales. Una actitud así resulta curiosa, por cuanto se renuncia voluntariamente a lo que podríamos llamar el fundamento ontológico del sistema; mientras subsiste la citada teoría, la logística de Russell resulta una ciencia de los entes ideales, es su tratamiento lógico, mas cuando se abandona la tesis, la logística se queda en el plano del mero formalismo pues no son otra cosa que formas vacías sin contenido alguno, ¿por qué esta actitud? En primer lugar, Russell halla dificultades metodológicas en el tratamiento de los entes ideales, como por ejemplo, con las clases; mas en este punto cabría preguantarse si una simple consideración de este tipo es capaz de invalidar toda una teoría como la presente, personalmente creemos que no, desde que puede darse el hecho de una transitoria imperfección del método, a parte de que si queremos abandonar una teoría de este tipo, ello supone un trabajo de carácter ontológico que evidentemente Russell no ha realizado. Por otra parte, Russell presenta otro motivo para apartarse de su tesis inicial, y es su regreso al empirismo casi absoluto; continuando el autor con la tradición inglesa al respecto e influenciado por el estudio de la física contemporánea, llega a la conclusión de que sólo existen datos sensibles de tipo atómico que se enlazan por relaciones lógicas, pues a nuestro conocimiento sólo surgen los datos sensibles, y por lo tanto no existe una captación de entidades universales o ideales; la lógica vendría a constituir la estructura según la cual se articulan esos datos individuales, o sea su sintaxis. ¿Hasta qué punto es aceptable esta tesis? Desde luego que resulta difícil una respuesta tajante, pero cabe indicar que el pensamiento metafísico de la actualidad, como es el de Hartmann, Whitehead y el neo-tomismo, no aceptan un empirismo tan cerrado, ya que siempre admiten la captación de otra clase de entidades no sensibles, las cuales, en el caso de Hartmann, llegan a constituir un ser ideal, y en el caso del neotomismo, el conocimiento de entes de un tercer grado de abstracción (la llamada abstracción metafísica). La consecuencia es clara; en Russell ha habido precipitación en el rechazo de su tesis inicial; el empirismo cerrado que llega a profesar, ya no está de acuerdo con las corrientes de pensamiento que en la actualidad ofrecen mayores posibilidades para una nueva etapa del pensamiento metafísico; si algo habría que haber rechazado de su tesis, quizá fuera el admitir entes del tipo platónico, mas aunque ellos no puedan sostenerse en toda su realidad, por lo menos cabe hablar de un "objeto ideal", considerado, ya no como ser en sí, sino como *término de conocimiento*, desde que es una realidad innegable que captamos con nuestra inteligencia, un tipo de objetos que no son empíricos, ya que, como el caso de los objetos matemáticos, no son temporales, ni espaciales y ni mucho menos están sujetos al cambio propio de los objetos empíricos. En resumen, Russell entrevió el problema, mas no llegó a enfrentarlo en toda su profundidad.

4) Enfoquemos ahora otro tema de excepcional importancia en Russell, el problema del infinito. Cuando el autor presentó sus trabajos al respecto, muchas fueron las objeciones que saltaron al paso, ya que parecía trabajar con el infinito actual; es cierto que Russell no aclaró en sus libros la realidad del problema que trataba, y por ello las objeciones fueron muchas, mas si se analiza con detenimiento el pensamiento del autor, quizá se llegue a la conclusión de que la gran mayoría de las críticas han sido mal planteadas. En efecto, Russell al trabajar con el infinito no construye una doctrina filosófica de él, pues su intento se limita a construir una lógica que permita un trabajo científico; esta circunstancia nos lleva a considerar una delimitación de campos en este terreno, primero tenemos que comprobar si, efectivamente, Russell admite la existencia de un infinito actual, y segundo, cual es el fin de su sistema al respecto. La primera cuestión se presenta con cierta claridad, Russell trata de reconstruir la matemática y dentro de esta ciencia se ha presentado una urgente necesidad: la ampliación del concepto de número; anteriormente sólo existía el número finito, mas cuando aparece el cálculo infinitesimal y, sobre todo, cuando la físico-matemática va tomando conciencia de su aspecto molar, se precisa de un concepto de número más amplio, pues las realidades a las que se va a tener que

aplicar desbordan las posibilidades de las clases tradicionales de número. Es ante esta necesidad que Cantor construye su teoría de los conjuntos, la cual llevada a la matemática da como resultado la ampliación del concepto de número al surgir así el infinito. Mas la labor no queda completa con esta simple creación, pues se requiere que estos nuevos números sean operables, es decir, que se pueda trabajar con ellos, y esta tarea es imposible si no se tiene una teoría lógica al respecto. Esta última necesidad es recogida por Russell, y de aquí su teoría de las clases, entonces podemos preguntarnos, ya viendo las cosas desde este plano, si admite el infinito como una realidad; la respuesta es temporal, pues cuando Russell sostiene la realidad de los universales considera a las clases dentro de esa categoría, mas cuando abandona su tesis las clases pierden tal jerarquía. En su último libro sobre matemáticas [1] sostiene que no hay prueba de la existencia de las clases pero no hay tampoco ninguna razón lógica en contra ¿entonces cuál es su concepto del número infinito?, creemos que es el considerarlo *una hipótesis de trabajo*. Si consideramos las necesidades de la matemática cuando Cantor funda su teoría, y posteriormente la actitud de Russell sobre el mismo problema, no podemos menos de pensar que el número infinito no es otra cosa que un recurso metodológico para resolver un problema urgente, concepción esta que se refuerza con el posterior vuelco del autor. Y no podía ser de otro modo, ya que para llegar a un infinito actual es preciso realizar primero una elucidación ontológica, que no está presente ni en Cantor ni en Russell. El mérito de ambos autores reside en haber llegado a una construcción científica que permite un trabajo más cómodo dentro de las ciencias, pues es del todo evidente que se requería una ampliación del concepto de número como es fácil comprobarlo por la aparición de la Física Molar, donde las posibilidades a estudiar son innumerables y por ello inaccesibles a las teorías matemáticas clásicas. De aquí pues que las críticas hechas a Russell sobre un infinito ilegítimo parecen estar fuera de lugar, ya que el mismo, en el libro citado, evidencia que su tesis tiene el carácter de hipótesis de trabajo. Desde luego que aunque el presente tema tenga esta aclaración queda pendiente un problema: esta hipótesis de trabajo es arbitraria, es decir, que se queda en el plano de una simple creación mental sin ningún correlato objetivo; de nuevo repetimos nuestra afirmación anterior: este problema implica estudios ontológicos, que por desgracia en nuestros días recién están comenzando; el análisis de las creaciones y descubrimientos científicos bajo el punto de vista filosófico, ha sido sumamente descuidado por los pensadores, ya que, unas veces cegados por el po-

[1] La ya citada "Introducción a la filosofía matemática".

sitivismo o ilusionados por el espejismo de una revalorización total de doctrinas antiguas, se ha olvidado el enfrentamiento directo y sin prejuicios con los problemas. De otro lado no es posible pensar que meras creaciones mentales puedan tener aplicación directa y efectiva en la realidad, a menos que exista alguna correspondencia entre la creación o hipótesis de trabajo y la realidad a la cual se aplica; esto se confirma cuando las hipótesis científicas más atrevidas al entrar en contacto con las cosas concretas son capaces de producir transformaciones en ellas, tal como ha sucedido con las geometrías no-euclideanas, que al aparecer por primera vez en el campo científico fueron calificadas de abstracciones sin base alguna, mas cuando Einstein las aplica a la física, dan por resultado las consecuencias de la teoría de la Relatividad, mas esta circunstancia importa estudios filosóficos y no una mera aceptación del hecho científico.

5) La anterior consideración del infinito permite extraer otra conclusión, esta vez referente a la naturaleza que presenta dentro de las matemáticas. Ya hemos visto que, dentro del sistema de Russell, es más una hipótesis de trabajo; recordemos ahora las críticas que le hicieron Poincaré y los intuicionistas: el infinito aparece como una posibilidad continua de ilimitación y no como un hecho real. En nuestro concepto, esta crítica ha señalado la verdadera naturaleza del infinito en las matemáticas; efectivamente, el infinito matemático aparece junto con la idea de sucesión, esto es, cuando estamos en presencia de varios elementos que se siguen unos a otros, pues bien, en matemáticas resulta de gran importancia poder alcanzar el conocimiento del límite de esa sucesión pues ello derivará en posibilidades de operar con ella, mas aquí surge el problema, pues pese a todos los esfuerzos que se hagan al respecto, ese límite nunca aparece, ya que en toda sucesión siempre es posible aumentar un elemento más. Esta circunstancia ha llevado a efectuar referencias al infinito, así surgieron las clases infinitas, pero nos parece que tal denominación es impropia, pues la naturaleza de esta clase de sucesiones se refiere más bien a la falta de límite que al infinito mismo. Aquí tenemos una diferencia fundamental: falta de límite e infinito no son conceptos equivalentes dentro de las matemáticas. ¿Por qué? La respuesta es fácil; en el caso de la falta de límite hay una referencia a la sucesión de elementos, lo cual implica la existencia de un conjunto de ellos, mientras que cuando hablamos de infinito no hacemos alusión a ninguna sucesión sino a una propiedad de un ente simple, entonces mientras el conjunto ilimitado lo es por poseer elementos

sin límite, el ente infinito es tal gracias a que su simplicidad es perfecta. De otro lado cabe también una distinción desde el punto de vista gnoseológico, pues hablamos en este campo de ilimitación por la imposibilidad de nuestro conocimiento de captar la totalidad de elementos, por lo cual tenemos que ir aumentando uno por uno a los que ya conocemos, entonces la ilimitación proviene de la imperfección de nuestro entendimiento y no del objeto mismo. En cambio cuando hablamos del infinito, hacemos referencia a una propiedad del ente mismo, éste, aún cuando nuestro entendimiento fuera capaz de captar todas las posibilidades de lo real, seguiría siendo infinito, cosa que no ocurriría con la falta de límite. La consecuencia es fácil de conseguir; el llamado infinito en matemáticas no es infinito en sentido estricto, sino una simple falta de límite en una sucesión de elementos, por esto tuvo que construirse la teoría de las clases para poder manipular ese tipo de sucesión.

De la consideración hecha, se puede desprender otra conclusión: que la noción de infinito es más un concepto metafísico que un concepto matemático, por esta razón quizá sea más conveniente hablar en matemáticas de conjuntos "ilimitados" y no de conjuntos infinitos, lo cual quizá traiga alguna facilidad para su tratamiento.

6) Las consideraciones expuestas anteriormente, nos llevan a tomar en cuenta un hecho algo insólito dentro del campo de las ciencias lógicas y matemáticas: la presencia y necesidad de las hipótesis de trabajo. Hasta fines del Siglo XIX era creencia general que tanto la matemática como la lógica poseían el máximo de certeza científica que se le puede pedir a cualquier rama del saber, por cuanto sus primeros principios eran evidentes por sí mismos, lo que los exoneraba de prueba racional, proporcionándoles una solidez científica de rara perfección, ya que siendo ambas esencialmente deductivas, todas las conclusiones a que llegaran estaban garantizadas por la evidencia de los primeros principios. Pero resulta que al aplicarse el análisis logistico queda al descubierto el hecho insospechado, que en ambas ciencias existen hipótesis de trabajo, tal como puede suceder en la física o la química. La consecuencia es bastante clara, pues nos plantea el problema de averiguar cuáles de los primeros principios de ambas ciencias, son hipótesis de trabajo. Y esta circunstancia es de bastante gravedad, ya que nos muestra una evidente inseguridad en la base de dos tipos de conocimientos que siempre se consideraron como los más precisos, y esto por cuanto esos principios se presentan como meras suposiciones destinadas a evitar un estancamiento del conocer. Si esta conclusión puede descorazonar un poco, por otra parte tiene un aspecto favorable, ya que nos muestra con exactitud una de las limitaciones fundamenta-

les del conocimiento; el conocimiento absoluto es meta a la cual debe tenderse, mas no una realidad que se puede alcanzar aún con ciencias cuyo objeto es ideal. Esta parece ser la propiedad quizá más fundamental de nuestras facultades cognoscitivas, ya que ellas no pueden, y esto es un hecho no una inferencia, llegar en forma directa al objeto que pretenden; entonces para suplir tal deficiencia recurren a construcciones provisionales, las que pueden ser confirmadas o refutadas por las investigaciones posteriores; en este punto es conveniente hacer una precisión de concepto, desde que la idea de hipótesis está excesivamente ligada a la idea de verificación experimental empírica; esta circunstancia no es aplicable a las regiones del conocimiento de que nos estamos ocupando (regiones ideales como ya dijimos), y la comprobación de la hipótesis no proviene de experiencia alguna sino del proceso lógico de inferencia que ha de servir para una construcción sintáctica de todo el sistema, en esta construcción salta la corrección o incorrección de la hipótesis. Tenemos pues, que este tema de la logística de Russell, ha permitido, al aplicarse a la matemática, conocer otra de las limitaciones inherentes a las facultades cognoscitivas del hombre: que aún en el terreno de las ciencias ideales, tenemos que emplear las hipótesis de trabajo, las que se constituyen en parte integrante de cualquier tipo de conocimiento científico.

7) Si en los párrafos anteriores tuvimos una sorpresa por cuanto una de las creencias tradicionales de la lógica y la matemática quedaba desvirtuada, en cambio dentro del tema referente al papel de la razón y la intuición tenemos un regreso a los supuestos tradicionales. Como ya sabemos, Russell quizo construir un sistema donde la prueba racional estuviera siempre presente, desplazando así a la intuición, mas en el desarrollo mismo del sistema comprobamos que tal intento fue fallido. Esta circunstancia la apreciamos en forma especial dentro del campo de los axiomas, pues vimos que pese a partir de ciertas proposiciones iniciales que se admitían sin definición, fue necesario admitir ciertos axiomas que careciesen de demostración, es decir, que fueran, en la medida de lo posible, evidentes por sí mismos; tales fueron el axioma del infinito, el axioma de la multiplicación, etc. Claro que estos axiomas en el fondo fueron hipótesis de trabajo, mas el hecho de tener que ser admitidos sin la prueba racional que Russell había prescrito para todo el sistema, es evidente que se semeja mucho a un llamado a la intuición, ya que la hipótesis de trabajo, aunque no sea otra cosa que una hipótesis, debe tener algún respaldo que la justifique, pues si ellas son suposicio-

nes, no son convenciones arbitrarias. De otro lado, tenemos el hecho de que la demostración estricta y total que se pretendió con el sistema, no tuvo el feliz resultado que se esperaba, siempre quedaron algunas proposiciones que no tenian un fundamento del todo demostrativo, cosa confirmada del todo por el teorema de Godel. La conclusión que se puede extraer favorece al uso de la intuición, ya que una prueba total se ha visto que es imposible, pero ese uso de la intuición no puede estar librado, como sucedió antiguamente, a una mera captación clara y distinta, sino que necesita ceñirse a ciertas reglas, que si bien no pueden decir nada del empleo concreto de la intuición, servirán para una comprobación posterior y para depurar la actitud que busca lograrla. Este uso de la intuición, que podriamos denominar critica, parece desprenderse de las conclusiones anteriores, aunque en el dominio de la logística aún no haya sido reconocido.

8) Tenemos que ocuparnos ahora de uno de los temas más importantes y espectaculares del sistema de Russell: la identificación de la lógica y la matemática. Esta tesis permitia la deducción de toda la ciencia matemática a partir de unas proposiciones primeras de naturaleza lógica, con lo cual se aseguraba el máximo de corrección a la ciencia en reforma. ¿Logró Russell este intento? Es opinión corriente que la demostración concreta de tal tesis no tuvo éxito; los "Principia Mathematica" presentaron graves grietas en su armazón total, las cuales no pudieron ser cerradas ni por el autor ni por sus seguidores, lo cual queria decir con toda claridad, que la realización práctica de la tesis era imposible. Si analizamos con detenimiento esta situación, comprobaremos que los resultados, a mas de no probar la tesis indicaban un proceso contrario al supuesto por Russell, es decir, que no era la matemática la que se asimilaba a la lógica, sino la lógica que se asimilaba a la matemática, no se puede apreciar en el hecho de que la lógica se apropiaba del uso del simbolo, del cálculo, de la teoria de las funciones, para volcar dentro de esos elementos matemáticos los contenidos lógicos que permitian construir la logistica; en otras palabras, Russell efectuó el proceso inverso al que se propuso [2]. Pero si bien todo lo dicho es cierto, surge aquí una interrogante: lo que ha fallado es la realización práctica de las tesis, pero la tesis misma ¿no supondrán el análisis de elementos más complejos?, porque el afirmar que dos ciencias son igua-

[2] El mismo autor así lo admite en la siguiente cita de su obra "Nuestro conocimiento del mundo externo". (Buenos Aires. Edi. Losada, 1946. Traducción de Ricardo J. Velzi): "Esta clase de lógica es matemática en dos sentidos; es en sí misma una rama de la matemática y es la lógica aplicable especialmente a otras ramas más tradicionales de la matemática". (Pág. 55).

les, equivale a refundir en uno dos objetos que se creían distintos, y es evidente que esta situación no puede ser resuelta únicamente por una apreciación de sus consecuencias prácticas; veamos con algún detenimiento este punto.

Comencemos por analizar la naturaleza del razonamiento matemático. Es evidente, como ya lo demostró Poincaré a principios de siglo, que es imposible reducirlo del todo al método deductivo, por cuanto dentro de la matemática existen generalizaciones lo que supone el empleo de la inducción o recurrencia. Esta circunstancia difiere de la concepción que Russell posee de la lógica, por cuanto la considera una teoría de la deducción, y de este modo ya tenemos en la matemática un elemento que rebasa los límites que señala la lógica russelliana, en otras palabras, la identidad de lógica y matemática no puede sostenerse, dentro de la concepción de Russell, desde el punto de vista del razonamiento de esta última ciencia, desde que presenta elementos no considerados por el autor dentro del campo de la lógica [3]. Esta conclusión es clara, mas inmediatamente se plantea un problema: ¿la lógica contemporánea, no ya la de Russell, podría llegar a identificarse con la matemática?, problema este que se presenta debido a que la lógica de hoy no se limita tan sólo al método deductivo sino que incluye todos los demás procedimientos existentes. Al respecto, podríamos citar como ejemplo la opinión de Morris Cohen [4] quien en 1945 sostiene la identidad de ambas ciencias, por cuanto, dice, la inducción no es un procedimiento independiente sino que es tan sólo, como ya vimos lo sostenía Russell, una forma encubierta de deducción desde que simplemente se reduce a descubrir qué explicación conviene al fenómeno particular que tenemos delante, y sólo cuando esto ha sucedido se procede a la generalización; en conclusión, lógica y matemática serían idénticas. Mas aunque la explicación anterior parezca evidente, cabría hacer algunas objeciones, pues el concepto de inducción que se critica corresponde al que emplea la física, y aún en este caso sería motivo de un estudio profundo el determinar la naturaleza de la inducción, mas ya sabemos que en la matemática existe un tipo diferente de inducción, que si lleva ese nombre es más por una simple analogía con la anterior que por identidad de naturaleza; efectivamente el procedimiento por recurrencia no parte de la suposición que hace la inducción física, es decir, no supone la natura-

[3] Esos elementos serían la recurrencia como queda indicado, y el empleo de la intuición.

[4] Morris Cohen: "Introducción a la Lógica". F. C. E. México, 1952. Traducción de Eli de Gortari

leza constante de los grupos de fenómenos o el hábito de verlos siempre unidos, sino que, probando que una propiedad pertenece a ciertos miembros de una serie, pertenece a toda la serie, o sea, mas que nada un procedimiento constructivo donde ya se tiene conocido el grupo de objetos, lo cual no sucede con la inducción física. Por este motivo siempre tenemos un elemento distinto a la pura deducción como sostiene Russell, lo cual permite una diferenciación entre las dos ciencias, al menos desde el punto de vista del razonamiento.

Si las razones que anteriormente se presentaron pueden ser suficientes para negar la distinción entre ciencias lógicas y matemáticas, cabe mencionar otros elementos de juicio que también llevan a una conclusión igual. Y estos residen en el hecho de que tanto el objeto lógico como el matemático pertenecen a una nueva región de objetos que recién se ha descubierto en el siglo pasado, y como siempre que sucede un descubrimiento de este tipo, tenemos que las demarcaciones internas de esta región no están del todo precisas, lo cual trae consigo ineludibles confusiones. Así ha sucedido con Russell, al trabajar con dos tipos de objetos ideales, uno de los cuales (el lógico) parece regir en forma universal toda esa esfera, ha creído encontrar esa identidad que sostiene; este error es semejante al sucedido con la doctrina positivista, la cual deslumbrada con las ventajas y descubrimientos que la ciencia de lo real-empírico hacía, creyó que ella era la única capaz de explicar todo lo existente, mas la continua investigación filosógica permitió deslindar los terrenos. Quizá la solución esté en la afirmación de Hartmann:

> "Hay, pues, que sacar la conclusión inversa: las leyes lógicas son ya por naturaleza propias del ser matemático y lo dominan como suyas. Pero ellas mismas no son leyes matemáticas sino mucho más generales que éstas, sólo pueden decirse que son por naturaleza leyes del ser ideal" [5].

Lo cual nos indica que en la región de los objetos ideales, es la lógica quien determina las leyes generales, y cualquier otra rama de esta región tiene, en principio, que poseer una estructura determinada por la lógica; por este motivo podemos considerar que la lógica es la estructura formal de las matemáticas, dentro de la que deberá desarrollarse esta ciencia, mas no podremos sostener la identidad de las dos. Una vez más estamos en presencia de una necesidad urgente de la filosofía: la estructuración de una teoría de los objetos ideales.

---

[5] Nicolai Hartmann: Ontología. "Fundamentos". Tomo I. F.C.E. México, 1954. Traducción de José Gaos, pág. 346.

9) Si la matemática queda considerada como una ciencia de objetos ideales, es preciso aclarar del todo la relación que pueda tener aún con la cantidad. Algo ya expusimos con anterioridad, al decir que la cantidad no aparecía para nada en ciencias como las geometrías modernas, la topologia o el álgebra abstracta; tan sólo la aritmética parecía tener relación con la cantidad, pero con una cantidad diferente de la tradicional pues tenía un contenido de sucesión y no de aumento y disminución. El punto es importante dentro del sistema de Russell, pues como ya vimos era una de las razones que daba para poder identificarla con la lógica, ¿cuál es, pues, la conclusión a que podemos llegar al respecto? En principio creemos que la afirmación de Russell puede sostenerse; hoy en día la cantidad, en su concepto clásico está muy lejos de la matemática, la razón es muy simple, pues esa relación existía cuando la finalidad de esa ciencia era la medición de la tierra, es decir, cuando era una ciencia práctica; mientras subsistió la idea de utilizar la matemática como un medio de medir cosas, su relación con el concepto tradicional de cantidad era evidente: sólo lo que aumenta o disminuye puede medirse, mas cuando la matemática va independizándose de esta necesidad práctica y va convirtiéndose en una ciencia teórica, capaz de estudiar su objeto tan sólo en virtud de lo que él vale de por sí, la relación con la cantidad se va agrandando, hasta romperse del todo. En verdad este es el camino que siguen todas las ciencias, pues en su primer momento de creación responden tan sólo a una necesidad inmediata del hombre, pero bien pronto el hombre mismo las va seperando de este fin ya que descubre que existe una realidad más profunda que la necesidad práctica, la cual es preciso conocer pues, en última instancia, habrá de permitir un dominio mejor de la realidad; por esto abandona la subordinación de la ciencia para llegar a construir un saber teórico y que se basta con el simple conocimiento de su objeto. Así sucedió también con la lógica, que en sus comienzos fue la "ciencia del pensar en función de la verdad", desde que se esperaba de ella nos diese un método seguro para no errar en los razonamientos, pero con las investigaciones posteriores se llega a descubrir que la lógica tiene un objeto propio e independiente del "pensar correctamente" y así se constituye una ciencia pura. Entonces, en el terreno en que se muevan las actuales teorías matemáticas, no hay relación alguna con la cantidad; tan sólo en las matemáticas aplicadas podría pensarse en una vinculación, pues, por ejemplo, en Ingeniería, la matemática aún sirve para medir y calcular.

La matemática como teoría pura ya no se relaciona con la cantidad, mas aquí cabe preguntarse ¿la única razón de este cambio reside en el apartamiento de esa ciencia de la necesidad de medición? Parece ser que no, desde que la clase de estudio que hoy se hace de la matemática ha tomado una dirección peculiar; tipificando esta dirección, volvamos al criterio que usáramos al hablar del estudio actual de la lógica. Dijimos que hoy en día la lógica estaba desarrollando de modo extraordinario su carácter extensivo, pues bien, creemos que en la matemática sucede el proceso inverso: que se le está estudiando desde su punto de vista *comprensivo* o del contenido. Cuando la matemática servía para medir la tierra, se apreciaba sólo el carácter extensivo de la ciencia, de aquí la preponderancia de la cantidad en las matemáticas; pero un desarrollo de esta clase nunca es suficiente para una ciencia, desde que sólo la convierte en un instrumento de cálculo, olvidando el lado cualitativo que lleva al contenido (permítaseme forzar los términos) *ontológico* del objeto de la ciencia. Ambos aspectos son necesarios para completar el desarrollo de todo tipo de conocimiento, de lo contrario queda sólo una visión parcial; esto es lo que está sucediendo en la matemática: se analiza su aspecto comprensivo, de aquí la preocupación por captar la esencia del objeto matemático. Entonces, en un estudio comprensivo que tiene visos de análisis ontológico, es claro que la cantidad quede completamente de lado; esto no quiere decir que el rechazo de la cantidad resulte de una situación circunstancial, nada de eso, sino que sólo la consideración cuantitativa no lleva al interior del objeto de una ciencia, podrá, es claro, purificar ciertos problemas y apuntar algunas soluciones, mas por sí sólo es impotente para precisar la esencia del objeto, esta labor corresponde necesariamente al estudio comprensivo, pues por algo se relaciona en lógica a la comprensión con el contenido del concepto, en consecuencia, las teorías clásicas de la matemática olvidaban el estudio comprensivo de ella, y los resultados de este tipo de investigación muestran la gran distancia que existe entre la esencia del objeto matemático y la cantidad. Salta a la vista la importancia del descubrimiento de Russell respecto a la matemática: ésta muy poco tiene que ver con la cantidad, al menos con el concepto clásico que se tenía de ella (la cantidad), pues ya vimos que actualmente ese concepto también está variando de contenido.

Todo lo dicho anteriormente se refuerza con los elementos con que Russell construye la matemática: la coordinación biunívoca, serie y dimensión. Estos tres elementos nada tienen de cuantitativo, apenas sí caen dentro del campo de las puras relaciones, por ello la noción que Russell tiene de las matemáticas se refiere a un sistema de relaciones que se ordenan deductivamente, siguiendo reglas lógicas. Como se puede apreciar, aquí la cantidad nada tiene que ver con la matemática.

10) Relacionado con los deslindes del tema anterior, tenemos la investigación que Russell hace de la naturaleza del número. El hecho de haber apartado la esencia de la matemática de la noción de "más y menos", permite enfocar el problema del número, parte integrante de esta ciencia, con una claridad sumamente útil. Así, la vieja cuestión de definir lo que es el número queda planteada en su verdadero terreno: es preciso llegar a la esencia de él, y no fijarse en los múltiples usos que se le pueden dar. Por este camino se ha separado el número de toda ida de contar o enumerar, ¿por qué?, pues por cuanto estas dos operaciones son actividades prácticas, que suponen ya resuelta la naturaleza del número, por este motivo definir el número como multiplicidad o unidad, es hablar acerca de sus posibilidades de empleo en la realidad empírica, pero no decir nada acerca de su esencia última; por este motivo es que Russell afirma que al definir el número, va a buscar lo esencial de este objeto, al igual que "Hombre es lo que caracteriza a los hombres", entonces es claro que el número tiene una naturaleza propia absolutamente independiente de sus posibles aplicaciones prácticas.

El planteamiento anterior permite apreciar el problema bajo un nuevo aspecto: el considerar el número como un objeto de conocimiento. Si empleáramos terminología fenomenológica, podríamos decir que hemos hecho varias reducciones hasta quedarnos tan sólo con la esencia pura del número, y efectivamente es lo que ha hecho Russell, pues ha objetivizado el número, y esta circunstancia ha permitido conocer que posee una esencia propia e intransferible a otros objetos, de aquí que sea un imperativo el llegar a captarla para poder hablar con exactitud acerca de los que *"es"* el número. Tal ha sido el intento de su chocante definición del número como "la clase de todas las clases que le son coordinables"; es posible que la definición no sea del todo correcta, ni corresponda estrictamente a lo que es el número, pero tiene una virtud innegable: nos habla del número sin hacer relación alguna a la enumeración y la cuenta, basándose tan sólo en relaciones lógicas como la coordinación biunívoca, llega a la noción que buscaba; he aquí la muestra de como es posible alcanzar la verdadera naturaleza del número, que ya es considerado como un objeto en sí mismo, independiente de toda referencia empírica, pues, como lo ha mostrado la moderna investigación ontológica al respecto (Hartmann y Husserl principalmente, sin excluir algunas corrientes neoescolásticas) es un objeto puramente ideal, y por ello referirlo a operaciones prácticas es torcer el camino a seguir.

Entonces tenemos determinado el valor de la definición de número que ha dado Russell. Desde luego que no le asignamos el valor exclusivo de ser el primero en haber planteado el problema en esta forma, pues como él mismo lo reconoce en su obra "Nuestro conocimiento del mundo externo", debe esta orientación a las investigaciones anteriores del gran matemático Frege. Pero esta situación no quita valor al esfuerzo de Russell, primero, por ser el revalizador de la investigación de Frege, que estaba bastante olvidada, y segundo por la forma verdaderamente genial con que intentó realizar el fin que se había propuesto; por estas razones podemos decir, que si bien la solución concreta de Russell no ha tenido el carácter definitivo que se hubiera querido, ha señalado el camino para investigaciones posteriores, planteando correctamente la dirección que es preciso seguir para llegar a la verdadera esencia del número.

11) Si las tres nociones antes citadas nos llevan a precisar la noción del autor sobre las matemáticas, también nos ponen en presencia de uno de los mejores intentos de reconstruir la matemática, englobando todos sus progresos actuales, y en forma exactamente lógica. Es claro que partiendo de esas tres nociones básicas, que nosotros sostenemos que son las únicas que usa Russell para fundamentar la matemática, se puede construir toda la aritmética, incluso la no-conmutativa, la geometría con sus ramas euclideanas y no-euclideanas y así sucesivamente todas las demás secciones. Este intento evita toda contradicción, y elimina las antítesis entre los sistemas antiguos y modernos que, como ya sabemos, muchas veces parecen contradictorios unos de otros. En verdad Russell presentó en este intento, una solución de excepcionales alcances para los problemas internos de la matemática, que por desgracia fallaron en una reconstrucción total al descubrirse ciertos errores en el sistema lógico que debía llevar a la práctica la solución propuesta; creemos que este punto de partida presentado por Russell puede ser explotado con todo éxito en nuestros días, en que la logística ha logrado un progreso y perfeccionamiento que en la época de Russell no tenía.

12) Por último, algunas palabras sobre el problema de las paradojas. Este problema que tantas dificultades presentó a Russell, parece tener la naturaleza que le señaló Poincaré, es decir, se convierte en una cuestión de inclusión de elementos dentro de un conjunto que ya se suponía completo; como nos parece que la solución de Poincaré es la justa, no vemos otra salida que la reestructuración de la destrozada teoría de los tipos, ya que ella proporciona, por lo menos en teoría, un camino para decidir cuando la inclusión es correcta o no. Y si la teoría

de los tipos presenta esta utilidad, también queremos indicar que ella tiene una serie de posibilidades aún no explotadas, principalmente en el campo de la ontologia; veamos algunas.

Una revisión de los problemas filosóficos de la actualidad, nos permite extraer esta conclusión: la mayoría se deben a confusión de planos, en otras palabras, se deben a que aún no se sabe distinguir cuando un ente o un razonamiento pertenece a determinada categoría ontológica, pues es claro que la realidad se compone de diversos estratos de ser, teniendo cada uno sus propiedades, leyes y realidad propia e incomunicable; más es el caso de que cuando los filósofos construyen sus teorías, suelen olvidar esta división de lo real, como lo podemos apreciar a simple vista en el caso de la identificación de la matemática y la lógica. Entonces surge la conclusión por sí sola: se precisa una teoría que sirva de instrumento para efectuar esas delimitaciones y descubrir cuando se ha producido una transgresión, y creemos que la teoría de los tipos que formuló Bertrand Russell puede cumplir esa misión, aunque, desde luego, deba reformar y enriquecer su estructura con mejores elementos de trabajo. Es claro que cada tipo puede equivaler a una región ontológica, y las leyes que usaba Russell para evitar la confusión de tipos, pueden servir para demarcar los límites de cada región.

13) Finalmente, enjuiciemos en globo el sistema de Russell. Cabría efectuar esta labor desde dos puntos de vista: de la lógica en general, y desde su significación dentro del movimiento logístico en particular. En el primer caso, la importancia la creemos muy grande, no tanto por el sistema en sí (con sus cálculos, técnicas, generalizaciones) sino por las consecuencias generales que importa, como son las posibilidades ontológicas de la teoría de los tipos y la consideración extensiva de la lógica; tal circunstancia sitúa a Russell dentro del terreno de los grandes innovadores de la Ciencia Lógica, contribuyendo a su total caracterización como ciencia independiente.

En cuanto a su ubicación dentro del campo puramente logístico, el significado de Russell quizá disminuye un tanto, pues sus teorías han sido superadas ya en muchos aspectos, y además existen otros muchos estudiosos que iniciaron conjuntamente la revolución que significa la logística. Reconociendo esta limitación, podemos precisar que es Russell el primero en presentar un sistema completo, como se puede apreciar en su "Principia Mathematica", además de incluir en él, desde luego que en germen, casi todas las posteriores direcciones que había de seguir esta rama de la Lógica. En resumen, en este aspecto Russell se ubica como uno de los forjadores del movimiento.

Cabría también hacer alguna referencia al balance final del sistema russelliano en los terrenos de la filosofía general y la matemática. En cuanto a la primera, creemos que las consecuencias ya indicadas son suficientes para colocar a Russell en nivel bastante alto, mas como la valorización estrictamente filosófica del movimiento logicista recién se ha iniciado después de la Segunda Guerra Mundial y con cierta lentitud, no es posible dar un juicio definitivo sino apenas apuntar las posibles consecuencias, las que parecen ser de gran trascendencia, importando tal vez una revisión de los conceptos ontológicos tradicionales, por lo menos en la región de los objetos ideales. En lo referente a la significación matemática, nos parece que las posibilidades del sistema de Russell aún no han sido explotadas del todo, pues el fracaso del sistema se debió más que nada, a dificultades técnicas, esto es, a falta de procedimientos adecuados que hoy en día la Logística parece haber conseguido; por esta razón es posible pensar en una nueva aplicación de las *tesis* principales, como por ejemplo los tres principios que hemos señalado como los principales en la reconstrucción de la matemática. ¿Con técnicas modernas no darían un resultado distinto?

14) Con esta observación final, ponemos término al presente trabajo que ha intentado esbozar las implicaciones filosóficas que podían desprenderse del estudio del Logicismo de Bertrand Russell, las que sintetizamos en las siguientes conclusiones:

CONCLUSIONES

1) Las investigaciones de Bertrand Russell desarrollan el aspecto extensivo de la Lógica.

2) La lógica de Russell no cae en el puro formalismo mientras mantiene como supuesto filosófico la realidad de los universales.

3) La derivación del sistema lógico de Russell hacia el formalismo evidencia la necesidad de una teoría de los objetos ideales, como substratum de toda investigación lógica.

4) Russell planteó el problema de la necesidad del número infinito en las matemáticas, mas su concepción queda en el terreno de las hipótesis de trabajo.

5) De las investigaciones de Russell y de las críticas que recibió, es posible considerar al infinito matemático como mera falta de límite en general. Es más una ilimitación que un infinito en sentido ontológico.

6) La teoría del número infinito y la teoría de las clases en Russell revelan la importancia de las hipótesis de trabajo aún en las ciencias ideales.

7) Las dificultades surgidas en el sistema russelliano respecto a su total racionalización, muestran que el empleo de la intuición sigue siendo fundamental en cualquier ciencia, mas se precisa de una intuición crítica.

8) La identidad de la lógica y la matemática no puede sostenerse, mas el trabajo de Russell ha permitido aclarar las relaciones entre ambas ciencias, evidenciándose que ellas son ciencias de objetos ideales, y que la lógica aparece como la estructura formal de la matemática.

9) La matemática ya no es la ciencia de la cantidad, a menos que por cantidad se entienda algo distinto de la concepción clásica.

10) La investigación de Russell sobre la definición del número, ha puesto en evidencia que posee una naturaleza propia, independiente de la necesidad de contar y enumerar, lo cual señala el camino para llegar a la esencia del objeto número.

11) En la matemática se ha iniciado el estudio comprensivo del contenido de sus problemas.

12) Los elementos con que Russell reconstruye la matemática son: la *serie*, la *coordinación biunívoca* y la *dimensión*. Las posibilidades de estos elementos para cumplir la misión asignada por Russell aún no han sido explotadas del todo.

13) Las paradojas son un problema de inclusión de elementos en un conjunto.

14) La teoría de los tipos puede ser útil para una delimitación de los estratos ontológicos de la realidad.

15) El balance final de la obra lógica de Russell aún no es posibles establecerlo en forma definitiva, sino tan sólo apuntar sus conclusiones filosóficas, mas sea cual fuera el resultado final, Bertrand Russell ha ganado un puesto de jerarquía en la renovación de la Lógica.

APENDICE

SOBRE LA ULTIMA PUBLICACION DE BERTRAND RUSSELL

Cuando la presente tesis fue sustentada, septiembre de 1958, no había sido entregado al público "My philosophical development" [1], último trabajo de Bertrand Russell; de aquí que sea exigencia de honradez intelectual, el verificar qué aporte o rectificación impone esa obra a los conceptos vertidos sobre las ideas del autor estudiado.

La obra citada tiene el significativo valor de presentar las ideas actuales de Russell, punto de singular importancia desde que este autor está en constante reelaboración de su doctrina. Sobre este aspecto se puede hacer la siguiente afirmación, que comprobaremos a lo largo de este apéndice: la filosofía lógico-matemática de Russell ha llegado a un estado de estabilización. Y el afirmar tal cosa nos impone desde ya una limitación: al analizar la obra, lo haremos en función de la tesis que aquí se publica, pues es claro que ella versó sobre ese aspecto de la doctrina russelliana y no sobre el pensamiento total. Así planteado nuestro estudio, comencemos a revisar los temas que más nos interesan.

La definición de número, base de la fundamentación de las matemáticas, y que fue aceptada en la tesis, sigue siendo la misma en la nueva obra. Se le expone con términos bastante técnicos, aunque de mayor exactitud, pues se dice que número es aquello que reúne a todas las cuplas, donde X e Y son diferentes y cualquier elemento nuevo deberá ser igual a X o Y. Con todo Russell recuerda que los trabajos de Wittgenstein sobre la noción de identidad siguen creando problemas al respecto, como se puede apreciar fácilmente por la importancia de tal noción en el párrafo anterior. Pese a todo, Russell sigue opinando por la validez de la definición, cosa aceptable, por lo menos en un plano formal; otro medio de definir el número, considerando el actual carácter de la ciencia matemática, nos parece muy difícil de hallar.

En la tesis se presentó un problema respecto de las clases. Era éste, la determinación filosófica de su naturaleza; en una primera etapa del pensamiento de Russell, el problema estaba claro desde que las clases tenian igual valor ontológico que las ideas platónicas, mas en escritos posteriores tal carácter desaparecía no llegando a precisarse de modo concreto. En la actualidad el problema tiene ya una solución negativa (anteriormente ya se esbozaba en algunas obras, mas de modo algo vago), pues las clases son meras ficciones, y en palabras de Russell "Convenciones discursivas". Desaparece así, uno de los elementos que había llevado a Russell a tener un cariz idealista en su doctrina.

Señalábamos en nuestra tesis la naturaleza de las paradojas, indicando que, en esencia, se reducía a una dificultad de inclusión, pues no se podía determinar si

---

[1] Russell, Bertrand: "My philosophical development". George Allen and Unwin. London, 1959.

una clase se consideraba o no como término de su propio campo. Esta conclusión se ha visto confirmada. Efectivamente, se indica que el problema se presenta por tener que usarse la palabra "clase", que puede ubicarse dentro de proposiciones con muchos sentidos o valores. El autor hecha mano de la vieja teoría de los tipos para llegar a una solución, y por consiguiente el problema se resuelve en una jerarquía de proposiciones, donde se aprecia con facilidad que la paradoja proviene de confundir la jerarquía de las proposiciones, y es por esto que una clase se incluía como parte de sí misma, cosa imposible. Evidentemente que el problema consiste en deslindar una posibilidad de inclusión: al confundirse los tipos proposicionales la clase puede aparecer como parte de su propio dominio. La solución es la teoría de los tipos, la cual sigue defendiendo Russell pese a las opiniones de la mayoría de los logísticos actuales; con todo, esta defensa nos parece muy justificada, pues esa teoría, creemos, no agotó aún sus posibilidades, ya que en verdad, fue abandonada en los comienzos de su perfeccionamiento, prefiriéndose la nueva "teoría de los niveles del lenguaje" a influencias de una corriente lingüística dentro del campo lógico; quizá una revaloración de la teoría russelliana de los tipos presentes elementos que la logística no deba despreciar.

Pese a lo dicho anteriormente, y desde la situación de Russell, queda una dificultad con la teoría de los tipos. El autor al referirse a la naturaleza de las clases las menciona como "convenciones discursivas", y esto es llevar su naturaleza al campo lingüístico que es muy diferente al de la teoría de los tipos, por lo menos en los comienzos de ella tenía una dirección muy diferente. Claro que esta dirección coincide con la que Russell sigue actualmente, pero nos parece un escollo para la plena vigencia de esa teoría que la consideramos esencialmente lógica; se impone, nos parece, una más clara diferenciación de planos.

Otro punto digno de relievar, es la confirmación del carácter esclusivamente abstracto de la geometría. En la tesis dijimos que la geometría, dentro del sistema de Russell, se desarrollaba a partir de la noción de punto y del empleo de la relación denominada "Biunívoca", lo cual evidenciaba que esta ciencia había abandonado el vínculo tradicional con el espacio físico, desde que no necesitaba de los datos sensoriales para construir sus teoremas y proposiciones. Russell declara que la geometría es una mera colección de relaciones; no se ha dado cambio alguno en sus concepciones geométricas enunciadas en la tesis.

Tocamos ahora un problema de vital importancia: el idealismo russelliano. Este problema quedó algo incierto en la tesis, desde que en cada obra nueva el autor variaba su punto de vista; así, en una primera etapa ("Los problemas de la filosofía") se mostraba resuelto idealista considerando que las relaciones y palabras no objetivas del lenguaje eran semejantes a las ideas platónicas; en época posterior ("Fundamentos de filosofía" por ejemplo) abandona el platonismo para inclinarse hacia el empirismo; tiempo después reincide ("Investigación sobre el significado y la verdad"), para alejarse de nuevo ("Human knowledge"), dejando en suspenso el determinar con precisión cuál era su pensamiento definitivo. Para tranquilidad de quienes estudian el pensamiento russelliano, este problema da la impresión de estar llegando a una solución final, pues en la obra que revisamos [2] existe ya una línea bastante

[2] Debemos indicar que también en "Diccionario del hombre contemporáneo" (edición inglesa de 1952 y castellano de 1955), obra posterior a "Human knowledge", ya se esboza esta solución final.

clara: Russell es idealista. Las relaciones y las palabras no objetivas carecen de un correlato con la realidad empírica y sensible, no quedando otra solución que admitir la "realidad" de las ideas. El razonamiento que defiende la opinión de Russell es semejante al empleado en obras anteriores: la experiencia cognoscitiva no es de un sólo tipo (la sensible), teniendo que admitirse una diferente, y que es la perteneciente a este mundo de ideas. La base fundamental de todo el razonamiento se apoya en el análisis lingüístico, donde hay palabras que corresponden a cosas, pero también hallamos otras que no tienen tal correspondencia, y pese a ello no podemos prescindir de su uso; cosa análoga acontece con las relaciones que estudiamos en las matemáticas. ¿Serán estas las ideas platónicas? Russell es más cauto que en su juventud, pues dice que ello no se puede afirmar ni negar, más el problema existe y la solución parece ser la citada.

Con todo lo dicho nuestro problema toca a su fin, mas como sucede en la historia de la filosofía, termina un problema y nace otro. Existe un punto, bastante difuminado a través de la obra del autor, que complica la solución. En diversos pasajes habla Russell de la naturaleza de los entes matemáticos, y en forma que calificaríamos de subconciente, desliza las siguientes afirmaciones:

> "El sujeto, sin embargo, parece una **ficción lógica igual que los puntos matemáticos** y los instantes" [3].

Y también una cita del "Diccionario del hombre contemporáneo" (pág. 240), declara:

> "Nos vemos estimulados por nuestra experiencia a la **creación** del concepto de número".

Las dos citas pertenecen a obras antiguas de Russell [4], mas ninguna de ellas es corregida por las actuales. ¿Qué se desprende de estas dos consideraciones? Pensamos que llevan a una consideración constructivista de la naturaleza de los objetos de la matemática, que vienen a convertirse en casi una herramienta de trabajo. Con todo, queda fuera de este problema el segundo elemento idealista del pensamiento de Russell, como son las palabras no objetivas, pero como lo indicáramos en la tesis, el análisis lingüístico hecho por Odgen y Richards nos muestra que tampoco esas palabras pueden designar entes que existen en sí, puesto que son el producto de situaciones que indican tan sólo elementos auxiliares dentro del lenguaje humano. Quedan entonces dos problemas sobre este punto: la solapada noción constructivista de las matemáticas, y las objeciones de Odgen y Richards, que nos parecen definitivas.

Haciendo un balance general de todo lo expuesto, destaquemos en lugar preferente una particularidad del pensamiento actual de Russell: su punto de partida es cada vez más lingüístico. En sus primeras obras ya apuntaba esa dirección cuando sostenía que el lenguaje traducía la estructura de la realidad, y en esta última obra nos muestra cómo es posible obtener conclusiones de esa premisa. El problema de los objetos ideales, tiene su origen en la consideración de ciertos elementos del habla. Dentro de esta orientación es Russell uno de los pensadores más importantes, y uno de

[3] B.R.: "My philosophical development". Ob. cit., pág. 135. El subrayado es mio.

[4] Aclaremos que Russell en las dos citas, toma de sus escritos anteriores esas declaraciones.

los pocos que aún sigue extrayendo consecuencias de semejante tesis inicial, pese a que posee ella muchas limitaciones: en este sentido las modernas investigaciones de la filosofía del lenguaje, no de la lingüística ni de la filología, no parecen dar mucho valor a las llamadas "ontologizaciones del lenguaje", premisa que va teniendo cada vez menos ímpetu; no vamos a señalar aquí las razones para tal desvalorización ontológica, que por otra parte son muy conocidas, siendo suficiente recordar que hoy se piensa que el lenguaje "significa" mas no traduce ni representa la realidad misma.

Finalizando, diremos que esta nueva obra de Russell trae algunos motivos para pensar en mayores complejidades del pensamiento del autor, pero también creemos que lo afirmado en nuestra tesis no ha sufrido variación, antes bien, se puede pensar que muchos puntos ha tenido una reafirmación. Tal es la conclusión última que nos ha sugerido esta obra.

Lima, 30 de enero de 1960.