*Schuster, Federico Luis*

# No decidido, indecidible y tercero excluido

**Revista de Filosofía y Teoría Política**

*1986, no. 26-27, p. 341-344*

# No decidido, indecidible y tercero excluído

*Federico Luis Schuster*

Una de las objeciones tradicionales que se ha hecho al llamado "principio de tercero excluido" (en adelante, PTE) es la de que no vale para enunciados cuyo valor de verdad no puede ser decidido en el momento de su emisión. Es el caso de los enunciados acerca de futuros contingentes, de que habla Aristóteles en *Perí Hermenéias*.[9] "Habrá una batalla naval mañana" no es ni verdadero ni falso, a menos que estemos dispuestos a aceptar que todo lo que sucede está de antemano determinado de algún modo. Aceptada la argumentación, no podríamos seguir sosteniendo la validez universal del PTE. Sin embargo, la alternativa de hierro ("invalidación del PTE o aceptación del determinismo") puede ponerse en discusión.

Sin atenerse ya a cuestiones de hecho, el intuicionismo ha puesto en duda la validez del PTE para el caso de enunciados matemáticos que hablan del infinito. Un modelo ejemplar de este problema sería el de un número irracional de decimal no periódico cualquiera. Las propiedades de tal número sólo podrían determinarse parcialmente, ya que es imposible construirlo en forma completa. Siempre es posible hallar, para un valor n que ocupa el kaésimo lugar decimal del número definido, otro valor m que ocuparía el lugar decimal siguiente y que no puede ser determinado efectivamente. Para el intuicionismo, los enunciados matemáticos que hablan de propiedades imposibles de constatar en algún número construido efectivamente, carecen de valor de verdad. Puesto que nunca dejará de haber problemas matemáticos sin resolver, no puede decirse que o es verdadero un enunciado o es verdadera su negación. Es decir, no puede afirmarse la validez universal del PTE.

Suelen oponerse en estos casos dos concepciones de verdad. Una clásica, que sostendrá que todo enunciado es verdadero o falso, independientemente de nuestro conocimiento de su valor de verdad; y otra epistémica, que no aceptaría que un enunciado pudiera tener un valor de verdad más allá de nuestro conocimiento. Las objeciones al PTE, se dice, se enmarcarían en esta discusión.

Teniendo en cuenta estos elementos, podemos tratar de hallar algunas similitudes entre los tipos de objeción al PTE descriptas:

(i) En ambos casos, las objeciones tienen que ver con ciertas consecuencias ontológicas o metafísicas de la aceptación del PTE. En el primero, admitir que un enunciado cuyo contenido es un acaecimiento futuro, posible pero no necesario, sea de suyo verdadero o falso, parece implicar la asunción de una posición determinista. Si un enunciado A, emitido en un tiempo $t_1$, contiene referencia a un tiempo futuro $t_2$ y ese contenido es contingente, A carece de valor de verdad para $t_1$, a menos que todo lo que sucede esté determinado de antemano de algún modo. Aceptar esto es negar toda contingencia y, en consecuencia, toda libertad. En el segundo caso, la atribución de un valor de verdad a un enunciado, independientemente de la posibilidad de conocer tal valor de verdad, nos compromete con la asunción de entidades no materiales, cuya existencia no depende de la conciencia. Por un lado el determinismo, por el otro el realismo platonista, se convierten en compromisos demasiado arriesgados y llevan a la invalidación del PTE.

(ii) Puede considerarse en los ejemplos citados un componente temporal.[1] Aunque por distintos motivos, tanto en uno como en otro hay un tiempo presente ($t_1$), en el cual no puede decidirse si un enunciado determinado es verdadero o falso. El hecho de que en $t_1$ no haya decisión posible no quiere decir que no exista un $t_k$ de la suceción temporal (infinitamente numerable) $t_2 \ldots\ldots t_n$, en el cual el problema pudiera tener solución (con la sola condición de que $t_2$ se sitúe en el futuro).

(iii) Ambas objeciones[2] están planteadas en el plano semántico. El PTE

$$p \vee \sim p$$

interpretado de algún modo peculiar no se satisface. En el primer caso, la interpretación se da para enunciados sobre hechos contingentes en el futuro. En el segundo, para enunciados matemáticos, que, si bien no son contingentes, no pueden ser constructivamente resueltos en el momento de emisión del enunciado.

(iv) Puede decirse, como síntesis, que el PTE, resulta objetado para enunciados cuyo valor de verdad no puede ser decidido en el tiempo presente. Pero queda siempre abierta la posibilidad de que tal decisión se alcance en algún momento. ¿Es sensato entonces pensar un tiempo futuro en el que no haya enunciados cuyo valor de verdad quede sin decidir? Como es obvio, no. Tanto en el caso de los futuros contingentes como en el de algunos enunciados matemáticos, la aparición de enunciados no decididos resulta inevitable.

Quiere decir que los ejemplos más característicos de objeción al PTE pasan por el plano semántico. Se trata de que en ciertas interpretaciones el PTE puede fallar.

Ahora bien, un intento válido puede ser el de averiguar qué sucede con el PTE desde una perspectiva sintáctica. La pregunta es: ¿es posible objetar el PTE en un plano previo a toda interpretación, o es necesario aceptar su validez universal para todo sistema sintáctico puro?

Introducimos el tema a partir de la consideración de las propiedades formales de *completud* y *decidibilidad*. La relación existente entre las propiedades de los sistemas axiomáticos y la formulación más usual de los llamados principios lógicos es conocida. Definimos.

[1] El concepto de "no decidido" que usamos desde el título mismo del escrito hace referencia a este componente temporal y no pretende un significado especialmente técnico.

[2] Es oportuno aclarar que en las dos objeciones anotadas reconocemos *tipos* de objeción al PTE, no exhaustividad.

ción una demostración tal. Lo que es a la vez un llamado de atención para la validez de la variante del PTE anotada recién.

Reformulando (a) en términos de la propiedad de completud, quedaría

(b) Si no hay sistema formal dentro del cual pueda decidirse todo enunciado, no es posible demostrar la completud en ningún caso; por lo que el PTE, al menos en su variante de condición metateórica, resulta objetable.

Con respecto al alcance del TIG, y en consecuencia de la objeción posible al PTE, dijimos más arriba que la prueba de Gödel se lleva a cabo para el sistema P, consistente en una unión de la lógica de *Principia Mathematica* con los axiomas de Peano. En consecuencia, vale para los principales sistemas lógicos y matemáticos conocidos. Gödel mismo extiende el alcance del TIG para todos los sistemas algo expresivos, incluyendo la teoría axiomática de conjuntos y la aritmética de Peano. Lo cual otorga, por cierto, un peso considerable a las consecuencias que del TIG pudieran resultar.

Volviendo al PTE, consideramos necesario determinar algunas de las posibles variantes del mismo y ver en qué medida se relacionan con nuestros planteos. Tomamos con sentido instrumental, para ello, la siguiente clasificación de las expresiones del PTE:[6]

(1) A v ~ A esto es, (VA) (Av ~ A) es verdad lógica

(A es una variable metalingüística que refiere a cualquier sucesión finita de signos que pueda ser considerada fórmula en un sistema dado, según sus reglas de formación).

(2) (/p/ = V) ó (/p/ = F). Este es el llamado "principio de bivalencia. (Aclaramos: /.../ indica "el valor de..."; V indica "verdadero" y F indica "falso").

(3) (/p/ = V) ó (/~ p/ = V).

(4) /p/ = V si y sólo si /~ p/ = F

/~ p/ = V si y sólo si /p/ = F

(5) /p/ = u es o V o F. (Donde u indica cualquier valor).

Diremos que la objeción aquí propuesta se aplicaría a la formulación más débil (y a nuestro modo de ver más interesante) del PTE, es decir (1).

De lo dicho extraemos, a modo de escuetas conclusiones, lo siguiente:

(i) El hecho de que no pueda probarse la completud de importantes sistemas formales, dentro mismo de tales sistemas, es un alerta contra la supuesta indubitabilidad del PTE.

(ii) Si existe al menos un enunciado A formalmente indecidible —como muestra Gödel que sucede en los sistemas mencionados—, se pone en duda la siguiente afirmación: Para toda fórmula A de un sistema axiomático P, o bien A es teorema del sistema o bien lo es su negación. Es decir, una variante del PTE.

(iii) A las objeciones semánticas al PTE expuestas más arriba puede añadirse, según se vio, alguna objeción sintáctica.

### Referencias bibliográficas

Kurt Gödel, Obras Completas°. Introducción y traducción de Jesús Mosterín, Madrid, Alianza Editorial, 1981.

Nicholas Rescher, Many-valued Logic°, USA, Mc. Graw-Hill, 1969.

H. P. Sankappanavar, Decision Problems: History and Methods°, Brasilia, 1977.

A. N. Whitehead & B. Russell, Principia Mathematica° (to 56), Cambridge, At the University Press, 1964.

[6] Cfr. N. Rescher, *Many-valued Logic*, USA, Mc. Graw-Hill, 1969, pp. 148-154.

Un sistema axiomático es completo si para toda fórmula A del sistema, o bien A o bien ~ A son teoremas del sistema. La dependencia de esta forma de definir la completud formal respecto de alguna expresión general del PTE parece difícil de negar.

Un sistema axiomático es decidible si puede hallarse para él un procedimiento efectivo tal que, dada cualquier fórmula, permita decidir en un número finito de pasos si ella es deducible en el sistema.

Los trabajos destinados a probar la satisfacción de estas propiedades por parte de los sistemas formales existentes abundan (especialmente desde 1920) y constituyen de por sí un campo de especial interés para las investigaciones lógicas. Nosotros pretendemos utilizar, sin desarrollar en forma completa, uno de los resultados más importantes de esta línea de investigación.[3]

Se trata de las pruebas de Kurt Gödel, expuestas centralmente en *Sobre sentencias formalmente indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines,* y especialmente del teorema VI, que es el famoso *teorema de incompletud* de Gödel (en adelante, TIG). En ese artículo, Gödel define un sistema formal P, que servirá de base a sus demostraciones y que consiste esencialmente en la unión de la lógica de *Principia Mathematica* con los axiomas de Peano. Para ese sistema vale el TIG: dice que en el sistema P (aún ampliado con nuevos axiomas) *hay siempre alguna sentencia tal que ni ella ni su negación es deducible en el sistema.* (No avanzaremos aquí en el detalle de la demostración de este teorema, ya que haría engorrosa esta comunicación, y, por otra parte, es fácilmente hallable; referimos, en consecuencia, a la obra de Gödel[4]).

¿Podrá afirmarse que el TIG afecta en algo la credibilidad del PTE? Es lo que pretendemos analizar.

Lo primero a tener en cuenta es el tipo de objeción al PTE que resultaría admisible desde los hallazgos de Gödel. No puede decirse, por supuesto, que dentro de sistemas como el mencionado no valga el PTE. En *Principia Mathematica,* por ejemplo, la fórmula

$$p \vee \sim p$$

es teorema.[5] La objeción entonces debe plantearse en un plano superior (metateórico) y cuya aplicabilidad se extiende a ciertas propiedades de todo sistema construible. El enunciado correspondiente podría ser como sigue:

(a) Si aceptamos que en los sistemas formales clásicos es inevitable la presencia de fórmulas indecidibles, no vale universalmente la afirmación de que en un sistema lógico o bien una fórmula es teorema, o bien lo es su negación.

Pero tal afirmación no es otra cosa que una variante del PTE. La variante que se asocia a la ya mencionada propiedad formal de completud. En efecto, todo sistema que esté en condiciones de validar ese enunciado, será un sistema completo. Lo cual se valora positivamente desde todo formalismo. Pero, desde el teorema de Gödel, se pone en cues-

[3] Para un desarrollo más amplio de estos temas, remitimos a H. P. Sankappanavar *Decición Problems: History and Methods,* Brasilia, 1977, donde además de una excelente descripción de los logros alcanzados en problemas de decisión, se ofrece una amplísima y bien discriminada bibliografía sobre la cuestión.

[4] *Obras completas.* Intr. y trad. de Jesús Mosterín. Madrid, Alianza Editorial, 1981, pp. 55-97. Cfr, asimismo la introducción de Mosterín, pp. 45-54, de la que nos hemos servido en la exposición que aquí se hace.

[5] Cfr. A. N. Whitehad & B. Russell, *Principia Mathematica* (to * 56), Cambridge, At the University Press, 1964, p. 101, *2'11.