

Especificaciones en el cálculo del radio de curvatura de la leva del mecanismo plano*

Boris F. Voronin¹
Gustavo Villalobos-Hernández²

Universidad de Guadalajara,
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías,
División de Ingenierías,
¹Departamento de Ingeniería Mecánica Eléctrica,
²Departamento de Matemáticas,
Blvd. Marcelino García Barragán núm. 1421,
esq. Calzada Olímpica, Guadalajara, Jalisco, CP 44430.
MÉXICO.

correo electrónico (email): ¹boris.voronine@cupei.udg.mx
²gustavo.villalobos@cupei.udg.mx

Recibido 19-08-2011, aceptado 10-01-2012.

Resumen

El material presentado está dedicado a la resolución de un problema de mecanismos planos de levas, a saber: la determinación del radio de curvatura de la leva. En el artículo se muestra el proceso de la obtención de la ecuación de la curva de paso y de la ecuación del radio de curvatura. Éstos se muestran para el caso común: para mecanismos con seguidor de movimiento lineal alternativo con excentricidad e no nula y para mecanismos con seguidor oscilante. En una forma original se muestra que la curva convexa recibe signo negativo y la cóncava positivo, que para los mecanismos con seguidor de movimiento lineal alternativo hace una corrección sustancial en la ecuación antes obtenida por otros autores para el caso particular $e = 0$. La definición analíticamente exacta de la magnitud y forma de la curvatura de una leva tiene mucha importancia, puesto que permite diseñar un mecanismo con parámetros óptimos usando métodos numéricos. Para la obtención de las ecuaciones se emplea el método grafoanalítico que, gracias a la simplicidad y claridad, le hace atractivo para el uso en la escuela superior en el sistema de educación.

Palabras clave: teoría de mecanismos y máquinas, mecanismos de leva, curvatura.

*El tema presentado en el artículo se discutió en el XV Congreso Internacional Anual de la SOMIM. Cd. Obregón, Sonora, México, 2009.

Abstract (Specifications in the Calculation of the Radio of Curvature of the Cam of the Plane Mechanism)

The presented material is dedicated to the resolution of one problem of flat mechanisms of the flat cam, namely: to the determination of the radio of curvature of a cam. In the paper, the process of deducing the equation of a curve of a step and definition of the equation of radio of a curvature are shown. For the common case this is shown: for mechanisms with follower of linear alternative movement with eccentricity e not zero and for mechanisms with oscillating follower. In an original form it shown that the convex curve receives negative sign and concave, positive that for the mechanisms with follower of linear alternative movement does a substantial correction in the equation earlier obtained by other authors for the particular case $e = 0$. The definition analytically exact of the magnitude and form of the curvature of a cam has a lot of importance, since he allows to design a mechanism with ideal parameters using numerical methods. For deduction of the equations graphic analytical method is used, thanks to simplicity and clarity, does its attractive for the use in the higher school in an education system.

Key words: theory of mechanisms and machines, mechanisms of cam, curvature.

1. Introducción

En el proceso de la elaboración de los planos de los mecanismos de leva es muy importante definir correctamente los esfuerzos del contacto. De la magnitud de éstos depende la rapidez de desgaste y, por consiguiente, el tiempo de vida del mecanismo. El esfuerzo de contacto se determina por la fórmula de Hertz y depende de la configuración de las superficies conjugadas en la línea o en el punto de contacto. Por ejemplo, para el contacto de las superficies cilíndricas el esfuerzo de contacto se obtiene mediante:

$$\sigma_{Z_{m\acute{a}x}} = 0.418 \sqrt{\frac{qE_{eq}}{\rho_{eq}}} \quad (1)$$

en donde q es la fuerza unitaria: $q = Q/L$, (aquí Q es la fuerza de acción y L es la longitud de la línea de contacto); E_{eq} es el módulo de elasticidad equivalente de los elementos

que están en contacto: $1/E_{eq} = 1/2(1/E_1 + 1/E_2)$, en donde E_1 y E_2 son los módulos de elasticidad de los materiales de los elementos que están en contacto, y ρ_{eq} es el radio de curvatura equivalente de las superficies conjugadas:

$$\frac{1}{\rho_{eq}} = \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{r_2} \quad (2)$$

en donde r_1 y r_2 son los radios de curvatura de las superficies en la línea de contacto.

En la fórmula (2) el signo (–) corresponde al contacto interno, cuando una de las superficies es cóncava y otra es convexa.

Si la curvatura de la superficie del seguidor, que toca la de la leva es conocida y tiene contornos simples (una recta, una circunferencia, etc.), la superficie de la leva es más compleja y para la determinación de su curvatura es necesario tener la ecuación de ésta.

Al denotar la leva como el eslabón 1 y el seguidor como el 2, también indicar el punto o la línea de contacto con la letra B , para el mecanismo de un seguidor de cara plana, el radio de curvatura del perfil de la leva se calculará por la fórmula de Herónimus [6]:

$$\rho = r_0 + s_{B_2} + s_{B_2}'' \quad (3)$$

en donde r_0 es el radio primario de la leva; s_{B_2} es el desplazamiento del punto B del seguidor y s_{B_2}'' es el análogo de la aceleración del mismo (en adelante con subíndices se indicará la pertenencia de los vectores y de las coordenadas de los puntos a los eslabones concretos).

Para el cálculo del radio de curvatura de la curva de paso para los mecanismos de un seguidor del movimiento lineal alternativo con la punta hecha en forma de cuña, de rodillo y de zapata curva en [2], [3], [9], [10], [12] se presenta la siguiente fórmula:

$$\rho_{paso} = \frac{[(r_0 + s)^2 + (s')^2]^{3/2}}{(r_0 + s)^2 + 2(s')^2 - s''(r_0 + s)} \quad (4)$$

en donde $\rho_{paso} = \rho + r_r$ es el radio de curvatura de la curva de paso, en que ρ es el radio de curvatura de la superficie de la leva en la línea de contacto y r_r es el radio de rodillo del seguidor; r_0 es el radio primario de la leva; s es el desplazamiento del seguidor; s' es el análogo de la velocidad del seguidor y s'' es el análogo de la aceleración del mismo. Sin embargo, la fórmula (4) no es completa ya que es obtenida para el caso particular cuando la excentricidad es nula ($e = 0$).

Para los mecanismos con seguidor oscilante la fórmula para el cálculo del radio de curvatura se presenta solamente en [14]. Sin embargo ésta es difícil de emplear en la práctica, ya que, debido a la toma del esquema del mecanismo en forma específica, la fórmula resultó muy compleja.

Seguidamente se muestra el proceso unificado de la deducción de las ecuaciones para el cálculo del radio de curvatura para los mecanismos con el seguidor del movimiento lineal alternativo y para los con el seguidor oscilante. Para los primeros las ecuaciones se obtienen para el caso común, cuando la excentricidad no es cero ($e = 0$), y para los segundos en forma más conveniente para el cálculo.

2. Conceptos generales

La obtención de las fórmulas para el cálculo del radio de curvatura de la leva se basa en la interpretación matemática tradicional de la determinación de la curvatura de una curva presentada en [1], [4], [5], [11], [13], [14], etcétera:

$$k = \frac{d\phi}{ds} \quad (5)$$

en donde ds es el diferencial del arco de la curva en el punto en que se calcula la curvatura y $d\phi$ es el diferencial del ángulo del mismo arco.

Al aplicar la ecuación (5) a la curva de paso de los mecanismos de leva con el seguidor de cuña, de rodillo o de zapata curva, y luego multiplicar y dividir por $d\phi$, en donde ϕ es el ángulo de giro de la leva, ésta obtendrá la siguiente forma:

$$k_{paso} = \frac{d\phi}{ds} \frac{d\phi}{d\phi} = \frac{1}{s'} \left| \frac{d\phi}{d\phi} \right| \quad (6)$$

en donde s' es el análogo de la velocidad de deslizamiento del punto de la curva de paso sobre la propia y $d\phi/d\phi$ es el análogo de la velocidad de la variación del ángulo de orientación del vector de esta velocidad, provocada por el deslizamiento del punto sobre la curva, en otras palabras, es la velocidad angular del movimiento giratorio del vector velocidad provocada por el deslizamiento del punto sobre la curva. Al presentar el mecanismo en un sistema de coordenadas $S(x, y)$ se obtiene:

$$\phi = \arctan \frac{y'}{x'} \quad (7)$$

en donde x' e y' son las proyecciones del análogo de la velocidad de deslizamiento del punto sobre la curva de paso de la leva sobre los ejes del sistema de coordenadas S .

Con esto, la derivada de (7) tendrá la siguiente forma:

$$\frac{d\phi}{d\varphi} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x')^2 + (y')^2} \quad (8)$$

en donde:

$$\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = s' \quad (9)$$

es el análogo de la velocidad de deslizamiento del punto de la curva de paso sobre la propia.

Así pues, la ecuación (6) en forma general obtendrá la siguiente forma:

$$k_{paso} = \frac{x'y'' - x''y'}{(s')^3} \quad (10)$$

y el radio de curvatura de la curva de paso, la siguiente:

$$\rho_{paso} = \frac{1}{k_{paso}} = \frac{(s')^3}{x'y'' - x''y'} \quad (11)$$

Para resolver esta ecuación se necesita obtener la ecuación de la curva de paso.

3. Obtención de la ecuación de la curva de paso

Ésta, en forma general, se obtiene así: se construyen dos sistemas de coordenadas con el inicio en el centro de rotación de la leva. Un sistema se considera inmóvil, unido rigidamente a la base en que se coloca el seguidor, y el otro móvil, unido rigidamente a la leva. En el sistema de coordenadas inmóvil se definen las coordenadas de un punto del seguidor, que puede ser el centro de rotación de rodillo, la punta de la cuña u otro. Al proporcionar el movimiento giratorio al sistema de coordenadas móvil junto con la leva, en correspondencia con la ley de movimiento se trasladará el punto elegido del seguidor. Transfiriendo las coordenadas de este punto al sistema de coordenadas móvil se obtiene la ecuación de la curva de paso.

Para mecanismos de seguidor del movimiento lineal alternativo. En la figura 1 se muestran dos sistemas de coordenadas: $S(x, y)$ es inmóvil y $S_1(x_1, y_1)$ móvil. El inicio de éstos se ubica en el centro de rotación de la leva O_1 . La leva 1 se dispone en el sistema de coordenadas S_1 y se une rigidamente a éste y el seguidor 2 se dispone en el sistema S . La leva junto con el sistema de coordenadas S_1 realiza el movimiento giratorio con una velocidad angular ω_1 y el seguidor el movimiento de traslación en el sistema S correspondiente a la ley de movimiento. Al inicio del movimiento el centro del rodillo del seguidor estará en la posición B . Al

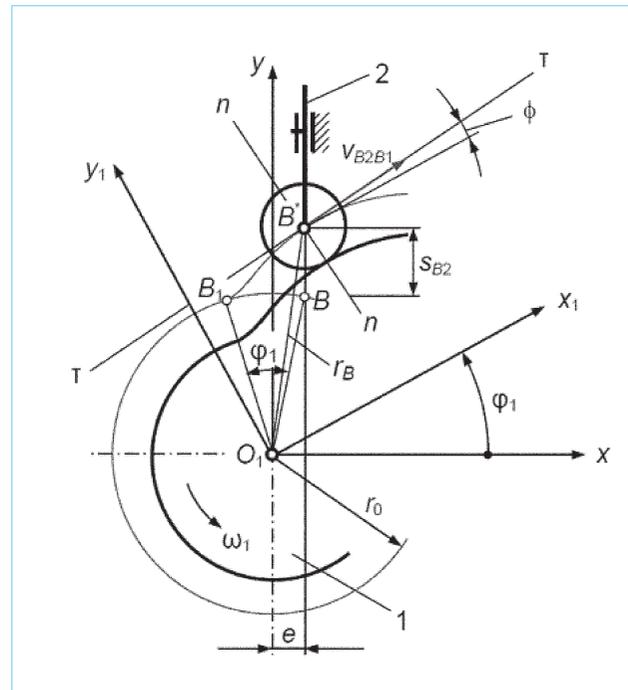


Fig. 1. Diagrama que ilustra la disposición de la leva 1 en el sistemas de coordenadas $S_1(x_1, y_1)$ y del seguidor 2 en el $S(x, y)$.

girar la leva junto con el sistema de coordenadas S_1 un ángulo φ_1 , el punto B , que pertenece a la leva, se traslada hasta la posición B_1 y B , que pertenece al seguidor, a la posición B^* . Entonces el segmento BB^* corresponde al desplazamiento del punto B del seguidor al proporcionar a la leva el giro junto con el sistema de coordenadas S_1 un ángulo φ_1 .

La curva plana, en la teoría de engranajes, en forma general, se presenta como:

$$r_1 = f(\varphi) \quad (12)$$

o, pasando a las proyecciones, en forma:

$$\begin{aligned} x_1 &= f(\varphi) \\ y_1 &= \psi(\varphi) \end{aligned} \quad (13)$$

Esto se obtiene mediante:

$$r_1 = M_{10} r \quad (14)$$

en donde M_{10} es la matriz de transferencia al sistema de coordenadas S_1 del S y r es el radio vector del punto de la curva presentado en el sistema de coordenadas S .

Para el esquema presentado en la figura 1 la matriz de transferencia se expresa en la siguiente forma:

$$M_{10} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \text{sen } \varphi_1 & 0 \\ -\text{sen } \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (15)$$

y el radio vector r , expresado en forma de las coordenadas del punto B del seguidor, escritas en el sistema de coordenadas S , como sigue:

$$\begin{aligned} x_{B_2} &= e \\ y_{B_2} &= s_{B_2} + \sqrt{r_0^2 - e^2} \end{aligned} \quad (16)$$

en donde e es la excentricidad, r_0 es el radio primario de la leva y s_{B_2} es el desplazamiento del punto B del seguidor.

Al multiplicar (15) por (16) se obtiene la ecuación de la curva de paso. Su forma es:

$$\begin{aligned} x_{B_1} &= e \cos \varphi_1 + (s_{B_2} + \sqrt{r_0^2 - e^2}) \text{sen } \varphi_1 \\ y_{B_1} &= -e \text{sen } \varphi_1 + (s_{B_2} + \sqrt{r_0^2 - e^2}) \cos \varphi_1 \end{aligned} \quad (17)$$

Para mecanismos de seguidor oscilante. En la figura 2 se muestra el esquema del mecanismo del seguidor oscilante de rodillo. Para éste se consideran los datos siguientes: la ley del movimiento del seguidor, el radio primario de la leva r_0 , la longitud del seguidor L_2 y la longitud de la base $L_{O_1O_2}$ (si la longitud de la base no se conoce, entonces el centro de rotación de la leva se toma en la cuerda que pasa a través de los puntos extremos de la trayectoria del punto B). La leva gira en el par cinemático de rotación O_1 con la velocidad angular ω_1 .

La ley del movimiento del seguidor se considera como $\theta_2 = f(\varphi_1)$ o se toma en forma $s_{B_2} = f(\varphi_1)$: en donde θ_2 es el desplazamiento angular del seguidor y s_{B_2} es el desplazamiento circular de la punta del mismo. Si la ley del movimiento del seguidor está dada por $\theta_2 = \theta_2(\varphi_1)$, $\theta_2' = \theta_2'(\varphi_1)$ y $\theta_2'' = \theta_2''(\varphi_1)$, en donde θ_2' es el análogo de la velocidad angular de éste y θ_2'' es el de la aceleración angular, entonces la velocidad angular y la velocidad circular del punto B se relacionan mediante $v_{B_2} = L_2 \theta_2' \omega_1$ y la aceleración angular y la aceleración circular del mismo punto como $a_{B_2} = L_2 \theta_2'' \omega_1$. Así pues, el análogo de la velocidad de la punta tendrá la siguiente forma $s'_{B_2} = L_2 \theta_2'$ y el de la aceleración, la siguiente $s''_{B_2} = L_2 \theta_2''$.

Igualmente, como en el ejemplo anterior, se toman los sistemas de coordenadas: $S(x, y)$ que es inmóvil y $S_1(x_1, y_1)$ que es móvil. Los inicios de éstos coinciden y se ubican en el

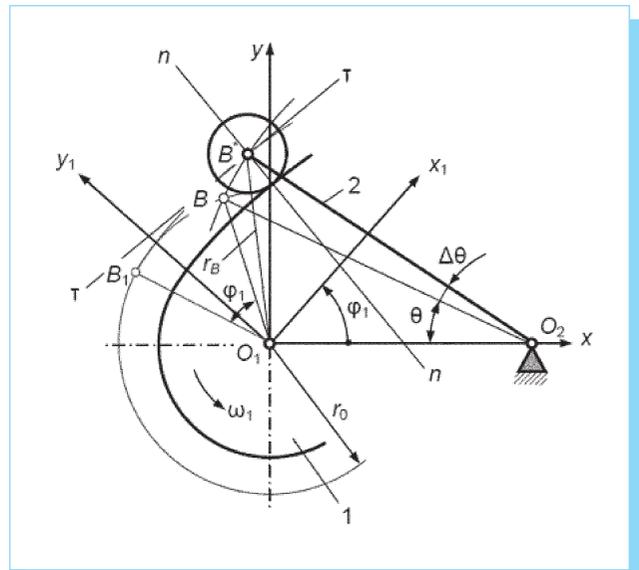


Fig. 2. Esquema para la obtención de las ecuaciones de la curva de paso, para el mecanismo de seguidor oscilante de rodillo.

centro de rotación de la leva O_1 . En la figura 2 se muestra el esquema de dicho mecanismo colocado en el sistema de coordenadas S de tal modo que la base O_1O_2 coincida con el eje x . El sistema de coordenadas S_1 está unido rígidamente a la leva y gira junto con ésta alrededor del punto O_1 , respecto al S . La posición de inicio del seguidor es O_2B y su posición después del giro de la leva un ángulo φ_1 es O_2B^* .

Aceptando la ley de movimiento en la forma $\theta_2 = \theta_2(\varphi_1)$, $\theta_2' = \theta_2'(\varphi_1)$ y $\theta_2'' = \theta_2''(\varphi_1)$ las coordenadas del punto B del seguidor en el sistema de coordenadas S se escribirán del siguiente modo:

$$\begin{aligned} x_{B_2} &= L_{O_1O_2} - L_2 \cos(\theta + \Delta\theta) \\ y_{B_2} &= L_2 \text{sen}(\theta + \Delta\theta) \end{aligned} \quad (18)$$

en donde el ángulo θ se determina por la fórmula:

$$\theta = \arccos \frac{L_2^2 + L_{O_1O_2}^2 - r_0^2}{2L_2L_{O_1O_2}} \quad (19)$$

Al multiplicar (15) por (18) se obtiene la ecuación de la curva de paso de la leva:

$$\begin{aligned} x_{B_1} &= [L_{O_1O_2} - L_2 \cos(\theta + \Delta\theta)] \cos \varphi_1 + L_2 \text{sen}(\theta + \Delta\theta) \text{sen} \varphi_1 \\ y_{B_1} &= -[L_{O_1O_2} - L_2 \cos(\theta + \Delta\theta)] \text{sen} \varphi_1 + L_2 \text{sen}(\theta + \Delta\theta) \cos \varphi_1 \end{aligned} \quad (20)$$

4. Obtención de las ecuaciones del radio de curvatura

Para esto se toma la ecuación (11). En la tabla 1 se muestran las ecuaciones de la curva de paso y sus derivadas para el mecanismo con el seguidor del movimiento lineal alternativo y en la tabla 2 con el seguidor oscilante.

En el numerador de la ecuación (11), la velocidad de deslizamiento del punto de la curva de paso sobre la propia se puede obtener utilizando la fórmula (9). Sin embargo es más fácil obtenerla mediante los siguientes razonamientos: Si se toma en cuenta que el seguidor intercepta a la curva de paso en un solo punto, para los mecanismos de rodillo en el centro de rotación B de éste, la velocidad relativa $v_{B_2B_1}$ de la punta del seguidor con respecto a la curva de paso será la del deslizamiento del punto de la curva sobre la propia. Para encontrarla se formula la ecuación vectorial de velocidades:

$$v_{B_2} = v_{B_1} + v_{B_2B_1} \quad (21)$$

y resolver ésta se construye polígono vectorial.

En la figura 3a se muestra el esquema del mecanismo de leva con seguidor del movimiento lineal alternativo de rodillo, en que O_1B^* es el radio vector del punto B del seguidor y $n-n$ es la normal común, y en la figura 3b la solución de

Tabla 1. Sistema de ecuaciones de la curva de paso y sus derivadas, para el mecanismo con el seguidor del movimiento lineal alternativo.

$$\begin{aligned} x_1^{B_1} &= e \cos\varphi_1 + (\sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B_2}) \operatorname{sen}\varphi_1 \\ y_1^{B_1} &= -e \operatorname{sen}\varphi_1 + (\sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B_2}) \cos\varphi_1 \\ (x_1^{B_1})' &= -e \operatorname{sen}\varphi_1 + (\sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B_2}) \cos\varphi_1 + (s^{B_2})' \operatorname{sen}\varphi_1 \\ (y_1^{B_1})' &= -e \cos\varphi_1 + (\sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B_2}) \operatorname{sen}\varphi_1 + (s^{B_2})' \cos\varphi_1 \\ (x_1^{B_1})'' &= -e \cos\varphi_1 - (\sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B_2}) \operatorname{sen}\varphi_1 \\ &\quad + 2(s^{B_2})' \cos\varphi_1 + (s^{B_2})'' \operatorname{sen}\varphi_1 \\ (y_1^{B_1})'' &= -e \operatorname{sen}\varphi_1 - (\sqrt{r_0^2 - e^2} + s^{B_2}) \cos\varphi_1 \\ &\quad + 2(s^{B_2})' \operatorname{sen}\varphi_1 + (s^{B_2})'' \cos\varphi_1 \end{aligned}$$

Tabla 2. Sistema de ecuaciones de la curva de paso y sus derivadas para el mecanismo con el seguidor oscilante.

$$\begin{aligned} x_1^{B_1} &= L_{O_1O_2} \cos\varphi_1 - L_2 \cos(\theta + \Delta\theta + \varphi_1) \\ y_1^{B_1} &= -L_{O_1O_2} \operatorname{sen}\varphi_1 + L_2 \operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta + \varphi_1) \\ (x_1^{B_1})' &= -L_{O_1O_2} \operatorname{sen}\varphi_1 + L_2 (1 + \theta') \operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta + \varphi_1) \\ (y_1^{B_1})' &= -L_{O_1O_2} \cos\varphi_1 + L_2 (1 + \theta') \cos(\theta + \Delta\theta + \varphi_1) \\ (x_1^{B_1})'' &= -L_{O_1O_2} \cos\varphi_1 + L_2 \theta'' \operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta + \varphi_1) \\ &\quad + L_2 (1 + \theta')^2 \cos(\theta + \Delta\theta + \varphi_1) \\ (y_1^{B_1})'' &= L_{O_1O_2} \operatorname{sen}\varphi_1 + L_2 \theta'' \cos(\theta + \Delta\theta + \varphi_1) \\ &\quad - L_2 (1 + \theta')^2 \operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta + \varphi_1) \end{aligned}$$

la ecuación (21) presentada en forma de polígono vectorial de velocidades. Al analizar el polígono vectorial y el esquema del mecanismo se llega a la conclusión de que el triángulo $p_v b_1 b_2$ de éste es semejante al O_1B^*A . Esto establece correlación entre los análogos de las velocidades y los segmentos del esquema del mecanismo: en donde el segmento AO_1 por la magnitud es igual al análogo de la velocidad s'_{B_2} , el radio vector r_B al s'_{B_1} y el segmento AB^* al análogo de la velocidad relativa $s'_{B_2B_1}$ diseñados a escala del mecanismo μ_L .

Así pues, utilizando dicha igualdad, en la figura 3a se determina el análogo de la velocidad de movimiento del punto B_2 del seguidor con respecto al B_1 de la leva. Éste tiene la siguiente forma:

$$s'_{B_2B_1} = AB^* = \sqrt{AD^2 + (DB^*)^2} \quad (22)$$

en donde $AD = AO_1 - O_1D$ y $DB^* = DB_0 - B_0B^*$. Puesto que AO_1 es s'_{B_2} , O_1D es la excentricidad e , $DB_0 = (r_0^2 - e^2)^{1/2}$ y B_0B^* es s_{B_2} , resulta:

$$s'_{B_2B_1} = \sqrt{[(r_0^2 - e^2)^{1/2} + s_{B_2}]^2 + (s'_{B_2} - e)^2} \quad (23)$$

Al sustituir en (11) el numerador (la velocidad de deslizamiento) por (23) y los términos del denominador, por sus valores de la tabla 1, se obtiene la ecuación del radio de curvatura de la curva de paso para el mecanismo con el seguidor del movimiento lineal alternativo:

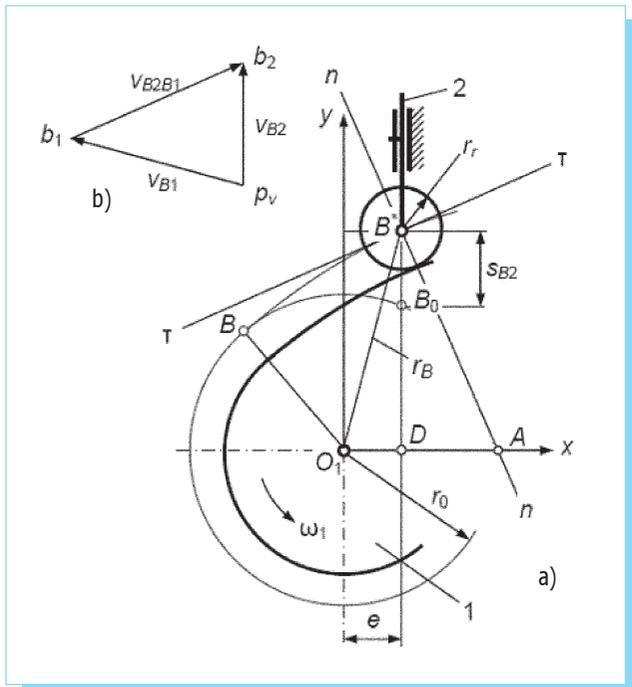


Fig. 3. a) Diagrama que ilustra la correlación entre el polígono vectorial de velocidades y b) la construcción geométrica del esquema del mecanismo.

$$\rho_{paso} = \frac{[f(s_{B_2})^2 + f(s'_{B_2})^2]^{3/2}}{s''_{B_2} \times f(s_{B_2}) - f(s_{B_2})^2 - 2(s'_{B_2})^2 + C} \quad (24)$$

en donde:

$$f(s_{B_2}) = (r_0^2 - e^2)^{1/2} + s_{B_2}, \quad f(s'_{B_2}) = s'_{B_2} - e \quad \text{y} \quad C = e(3s'_{B_2} - e)$$

En la figura 4a se muestra el esquema de un mecanismo de leva con seguidor oscilante, en que O_1B^* es el radio vector del punto B del seguidor y $n-n$ es la normal común que se cruza en el punto A con la línea trazada a partir del punto O_1 paralelamente al seguidor O_2B^* . En la figura 4b se presenta la solución gráfica de la ecuación (21) en forma de polígono vectorial de velocidades. De éste se observa que el polígono vectorial $p_v b_1 b_2$ es semejante al O_1B^*A del esquema del mecanismo. Con esto se tiene:

$$s'_{B_2B_1} = \sqrt{L_{O_1O_2}^2 + L_2^2 E^2 - 2L_{O_1O_2} L_2 EF} \quad (25)$$

en donde L_2 es la longitud del seguidor; $L_{O_1O_2}$ es la longitud de la base del mecanismo; $E = (1 + \theta)$ y $F = \cos(\theta + \Delta\theta)$.

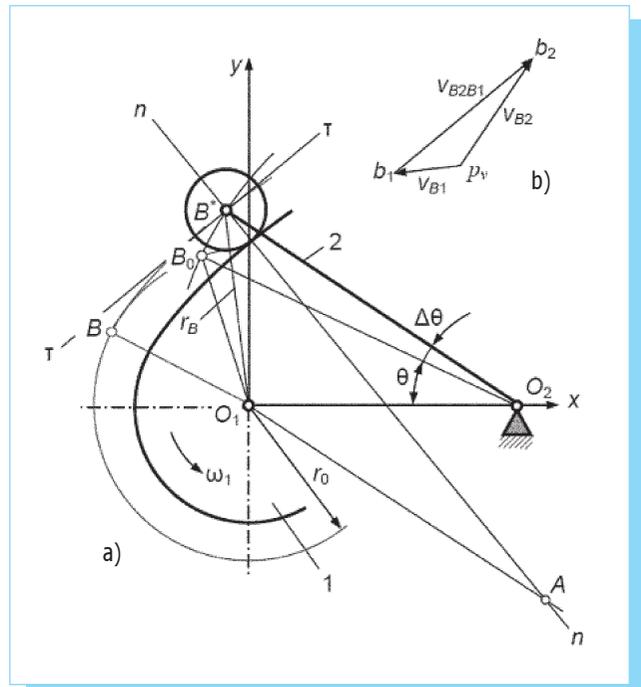


Fig. 4. Esquema para la obtención de la ecuación de velocidad de deslizamiento del punto B del seguidor sobre la curva de paso.

Sustituyendo en (10) el numerador por (25) y el denominador por sus valores en la tabla 2 se tiene:

$$\rho_{paso} = \frac{[L_{O_1O_2}^2 + L_2^2 E^2 - 2L_{O_1O_2} L_2 EF]^{3/2}}{-L_{O_1O_2}^2 - L_2^2 E^3 - L_{O_1O_2} L_2 \theta^n D + L_{O_1O_2} EFG} \quad (26)$$

en donde:

$$D = \text{sen}(\theta + \Delta\theta) \quad \text{y} \quad G = 2 + \theta'$$

Para comprobar lo obtenido, se toma la ecuación (24). Tomando la magnitud de excentricidad $e = 0$, ésta obtiene forma:

$$\rho_{paso} = \frac{[(r_0 + s_{B_2})^2 + (s'_{B_2})^2]^{3/2}}{s''_{B_2}(r_0 + s_{B_2}) - (r_0 + s_{B_2})^2 - 2(s'_{B_2})^2} \quad (27)$$

que coincide con la fórmula (4) indicada en [2], [3], [9], [10], [12]. Pero la coincidencia no es completa ya que hay diferencia en el signo del denominador y por consiguiente en el signo del radio de curvatura. Al hacer cálculo mediante la fórmula (4) el radio de curva convexa obtiene signo positivo (+) y el radio de curva cóncava, negativo (-), aplicando la fórmula (27) los signos resultan contrarios. Esta

diferencia obliga buscar la resolución de este problema ya que la solución correcta determina el tipo de la curva.

En [7] y [8] se dice "el signo positivo (de la curvatura) significa que el sentido del radio de curvatura coincide con la dirección positiva de la normal". Pero puesto que la normal es una línea infinita que no tiene ni origen ni final esto no expresa qué tipo de curva es, cóncava o convexa, cuando tiene signo positivo o negativo.

En [1], [4], [5], [11], [13] en la fórmula de curvatura (10) el denominador se toma por módulo, es decir, el signo de la curvatura no se toma en cuenta.

Puesto que en matemáticas se trata de una curva en general, esto no es importante. Tampoco en el cálculo a mano esto tiene mucha importancia ya que en cualquier momento es posible designar cualquier signo, positivo o negativo para los cálculos posteriores. Pero en el cálculo con métodos numéricos mediante la programación, esto puede conducir a un error ya que en el par cinemático superior, para el cálculo de esfuerzos de contacto, se necesita calcular el radio de curvatura equivalente de las superficies conjugadas presentado en (2), una de las cuales es convexa y la otra puede ser cóncava o convexa. Por eso los autores encuentran la necesidad de definir la forma exacta de la curva.

Se toma el ejemplo de una curva de paso de la leva, mostrada en la figura 5, que tiene dos partes: una cóncava, en el punto A, el centro de curvatura está fuera de la curva, fuera del espacio limitado por los planos del sistema de coordenadas $S(x, y, z)$ de un lado y la curva del otro; y otra convexa, en el punto B, el centro de curvatura está dentro de la curva, dentro del espacio indicado. Si el sentido de giro de la leva contrario al de las manecillas del reloj se acepta como positivo, ya que el sentido del vector de la velocidad angular coincide con el sentido del eje Oz del sistema de coordenadas, entonces el vector v_A de la velocidad de deslizamiento de la punta del seguidor con respecto a la leva en el punto A y v_B en el punto B tendrán el mismo sentido, así como se muestra en la figura 5. Pero el sentido del vector

$$\frac{d\phi_A}{dt} = \frac{d\phi_A}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi_A}{d\phi} \omega \quad (28)$$

de la variación del ángulo ϕ_A de la orientación de la tangente $\tau_A - \tau_A$, provocada por el movimiento del punto A sobre la curva es positivo, ya que está dirigido en el sentido coincidente con el eje Oz , y el sentido del vector $d\phi_B/dt$ de la variación del ángulo ϕ_B de la orientación de la tangente $\tau_B - \tau_B$, provocada por el movimiento del punto B es negativo, ya que está dirigido en sentido contrario al del eje Oz . Entonces, en el primer caso la curvatura $k_A = d\phi/ds$ es positiva y en

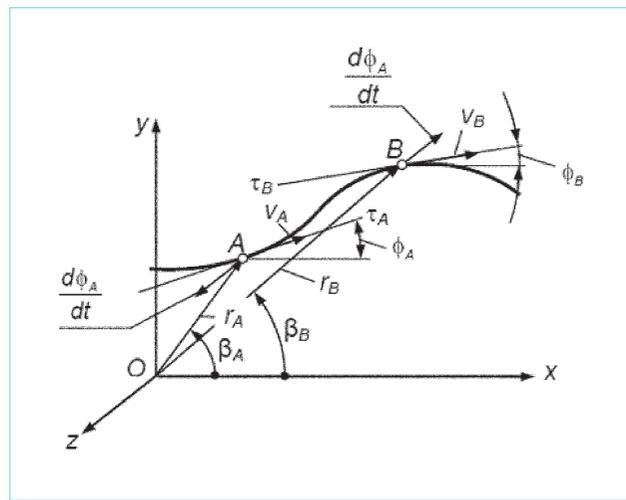


Fig. 5. Para la definición del signo del radio de curvatura.

el segundo $k_B = d\phi/ds$ es negativa. Así pues, resulta que el tipo de la curva de paso define solamente el sentido del vector de la velocidad de la variación del ángulo de la orientación de la tangente, provocado por deslizamiento del punto de la curva sobre la propia. Refiriéndose al problema planteado esto permite llegar a la siguiente conclusión: el radio de curvatura de la curva convexa va a tener signo negativo y de la cóncava, positivo.

De lo anterior resulta que las ecuaciones (24) y (27) de una sola manera definen la magnitud del radio de curvatura de la curva de paso y el tipo de ésta.

Sería importante determinar el radio mínimo de la curva de paso, ya que de la magnitud de éste depende la elección del radio de rodillo. Para esto se necesita derivar las ecuaciones (24) y (27) e igualarlas a cero, con esto se calcularía el ángulo de la posición de la leva ϕ cuando el radio de curvatura sería mínimo. Sin embargo, realizar esto es difícil ya que las ecuaciones resultan muy complejas. Se considera más fácil realizar este problema utilizando programación y los modernos medios numéricos de cálculo.

5. Conclusiones

En el material presentado se mostró el empleo del método grafoanalítico de la obtención de las ecuaciones de la curva de paso para los mecanismos de leva del seguidor oscilante y del seguidor del movimiento lineal alternativo con la punta hecha en forma de cuña, de rodillo y de zapata curva. Con el uso de éstas, son obtenidas las ecuaciones para el cálculo

del radio de curvatura de la leva. Para los mecanismos con el seguidor del movimiento lineal alternativo la ecuación del radio de curvatura se obtuvo para el caso común $e \neq 0$. En el caso particular $e = 0$ se observa la coincidencia de la ecuación obtenida a la presentada por otros autores. La diferencia consiste solamente en el signo de la curva.

En forma muy clara y sencilla se probó que para mecanismos con seguidor de movimiento lineal alternativo el radio de curvatura de la curva convexa obtiene signo negativo y de la cóncava, positivo que hace una corrección sustancial en la ecuación antes obtenida por otros autores para el caso particular $e = 0$. Entonces, las ecuaciones obtenidas en el presente artículo para el cálculo de la curvatura de la curva de paso de una sola manera definen tanto la magnitud, como el tipo de la curva.

El trabajo está dirigido al diseño mecánico y puede ser usado por los ingenieros diseñadores de las máquinas e ingenieros que desarrollan software en diseño mecánico. También es útil para el uso en el sistema educativo. La obtención de las ecuaciones se realizó a base del método grafoanalítico que gracias a la simplicidad y claridad le hace atractivo para el uso en la enseñanza en la escuela superior.

Nomenclatura

e	excentricidad
k	curvatura
$n - n$	normal común a las superficies conjugadas en el punto de contacto
s	desplazamiento del seguidor
s'	análogo de velocidad (la primera derivada del desplazamiento lineal de la punta del seguidor en función al desplazamiento angular de la leva, $s' = ds/d\phi$)
s''	análogo de aceleración (la segunda derivada del desplazamiento lineal de la punta del seguidor en función al desplazamiento angular de la leva, $s'' = d^2s/d\phi^2$)
r_0	radio de círculo primario
ϕ	ángulo de orientación de la tangente a la curva
φ	ángulo de giro de la leva
μ_L	escala en que se diseña el mecanismo o diagrama ($\mu_L = L/l$, en donde L es la longitud natural de la

	medición, se mide en metros y l es su presentación en el diagrama, se mide en milímetros)
θ	ángulo de oscilación del seguidor oscilante
ρ	radio de curvatura, se mide como el valor inverso de la curvatura
$\tau - \tau$	tangente a las superficies conjugadas en el punto de contacto

Referencias

- [1] C.H. Edwards, y E. Penny David, *Calculus with Analytic Geometry*, Prentice Hall, New Jersey, 1994, pp.702-729.
- [2] F. Virgil Moring, *Diseño de elementos de máquinas*, México: Limusa, 2001, p. 694.
- [3] S. Foix Cardona, y D. Costa Clos, *Teoría de máquinas*, Catalunya, España: Ediciones de la Universidad Politécnica de Catalunya, 2001, p.106.
- [4] G. B. Tomas, Jr., *Cálculo. Varias variables*, 11ª ed., México: Pearson Educación, 2006, pp. 939-943.
- [5] G. L. Bradley, y K. J. Smith, *Cálculo de varias variables. Volumen II*, Madrid: Prentice Hall, 1998, p.893.
- [6] J. L. Herónimus, *Determinación del perfil de la leva por el movimiento dado del seguidor. Técnica del Flota Aérea*, núm. 3, Rusia, 1933.
- [7] F. L. Litvin, *Teoría de engranajes*, Moscú, Rusia: Nauka, 1968, p. 63.
- [8] F. L. Litvin, *Gear Geometry and Applied Theory*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1994, p. 104.
- [9] H. H. Mabie, y C. F. Reinoldz, *Mecanismos y dinámica de máquinas*, México: Limusa, 2001, pp. 118-132.
- [10] R. L. Norton, *Diseño de maquinaria. Una introducción a la síntesis y al análisis de mecanismos y máquinas*, México: McGraw-Hill, 2005, p. 379.
- [11] A. I. Ramírez-Galarza, y J. S. Kurí, *Introducción a la geometría avanzada*, México: Facultad de Ciencias UNAM, 2002, p. 45.
- [12] J. E. Shigley, y J. J. Uicker Jr., *Teoría de mecanismos y máquinas*, McGraw-Hill, 1990, p. 248.
- [13] F. G. Simmons, *Cálculo y geometría analítica*, McGraw-Hill, 2002.
- [14] O. A. P. Velasco, J. G. Reyes Victoria, *Curso de geometría diferencial. Parte I. Curvas y superficies*, México: UNAM, 2005.

Periódica: Índice de Revistas Latinoamericanas en Ciencias.
<http://www.dgbiblio.unam.mx/>