

Análisis de esfuerzo de contacto en engranes rectos aplicando el criterio de Hertz con ingeniería asistida por computadora

Jorge Carro-Suárez
Fabiola Flores-Salazar
Irma Flores-Nava

Universidad Politécnica de Tlaxcala
Kilómetro 9.5 Carretera Federal Tlaxcala-Puebla,
Av. Universidad Politécnica núm.1, CP 90180,
San Pedro Xalcatzingo Tepeyanco, Tlaxcala.
MÉXICO

Tel. (246) 4651 300 ext. 3003

correo electrónico (email): jorge.carro@uptlax.edu.mx
fabiola.flores@uptlax.edu.mx
irma.flores@uptlax.edu.mx

Recibido 02-08-2011, aceptado 01-12-2011.

1. Resumen

En el presente artículo se desarrolló una metodología para el análisis de esfuerzos de contacto sobre la superficie de los dientes de un engrane recto considerando los postulados Hertz y de Buckingham como criterios principales modelando su desarrollo por medio de la ingeniería asistida por computadora. Se analizan diferentes modelos de engranes bajo condiciones de diseño y de carga distintas mostrando un análisis comparativo de resultados con los obtenidos bajo las normas AGMA (*American Gear Manufacturers Association*) presentando las conclusiones pertinentes al final.

Palabras clave: esfuerzo de contacto, engrane, piñón, simulación.

2. Abstract (Contact stress analysis of spur gears applying Hertz's Formula with Computer Aided Engineering)

This article develops a methodology for the analysis of contact stresses on the surface of the teeth of a spur gear considering the assumption of Hertz&Buckingham's formula as the main

criterion modeling its development through the Computer Aided Engineering. It discusses different models of gears under load design and comparative analysis showing different results to those obtained under the AGMA wear formulas for gears (American Gear Manufacturers Association) and presenting relevant conclusions at the end.

Key words: contact stress, gear, pinion, simulation.

3. Introducción

La falla sobre la superficie de un diente aún no se ha comprendido por completo y es evidente que el estudio de este problema es mucho más complejo que el análisis de falla por carga flexionante; muchos estudios e investigaciones muestran que el desgaste o picado (*pitting*) surge debido al repetido esfuerzo de contacto o de compresión existente durante los periodos de engranaje y que inician principalmente en una pequeña área de contacto por rodamiento más que por deslizamiento [1]. Es claro que tanto los engranes rectos como los helicoidales inician su desgaste cerca de la línea de paso donde el contacto es básicamente entre superficies cilíndricas, es por eso que el diente debe ser lo suficientemente resistente para soportar la carga y no desarrollar grietas.

Cuando dos cuerpos con superficies curvas se presionan entre sí, el contacto directo y puntual sobre las superficies cambia a un área de contacto dando como resultado un esfuerzo muy alto, este análisis originalmente lo determinó Hertz, por lo que en su honor es llamado "esfuerzo de contacto de Hertz o esfuerzo hertziano" [2]; posteriormente, Earle Buckingham retomó esta información considerando a los dientes de los engranes en contacto como a un par de cilindros paralelos en los cuales el radio de curvatura es la involuta y el punto de contacto es el punto de paso [3]. Buckingham identificó que cuando dos superficies ruedan, o ruedan y se deslizan una contra otra con suficiente fuerza ocurrirá una falla por picadura después de cierto número de ciclos de operación; su fórmula, en conjunto con la investigación de Hertz han sido la fuente principal para que actualmente se analicen y diseñen engranes bajo el criterio de falla por picadura siendo las normas AGMA las que presentan un método teórico

apropiado condicionando su aplicación a el uso de varios factores de corrección empíricos evaluados a través de los años.

Para realizar el análisis de esfuerzo de contacto entre dos dientes de un engrane recto se desarrolló una metodología que combina las fórmulas de Hertz y de Buckingham con el uso de la ingeniería asistida por computadora, se inicia el estudio con un engrane sometido a carga analizado bajo las normas AGMA, posteriormente se determinan los factores de Hertz y de Buckingham calculando el área de contacto en el punto de paso, se modela el engrane en 3D y se realizan simulaciones utilizando CAE de alto nivel por medio de *SolidWorks Simulation from Dassault Systemes*, se analizan varios modelos bajo diferentes condiciones de carga, se comparan los resultados con los obtenidos por las normas AGMA y se presentan las conclusiones obtenidas al final.

4. Desarrollo

4.1. Análisis bajo las normas AGMA

Existen dos modos de falla principales que afectan a los dientes de los engranes rectos: la fractura por fatiga debido a esfuerzos de flexión en la raíz del diente y a la fatiga superficial sobre las superficies de los dientes (picadura), por lo que para su estudio y diseño, los fabricantes han tomado como base las normas AGMA destacando la norma AGMA 2001-D04 [4] cuyas fórmulas son aceptadas para el análisis por resistencia a la picadura o esfuerzo flexionante en conjunto con factores de corrección que han sido evaluados a través de los años por la experiencia acumulada en el diseño, manufactura y fabricación de unidades de engranajes; con el tiempo estos factores se han ido perfeccionando considerando también factores geométricos [5], complementando así todo un procedimiento teórico cuya única limitante es el hecho de que su uso se recomienda solamente para personal con amplia experiencia en el área de diseño mecánico y con la capacidad y criterio suficiente para determinar los factores, entendiéndose que no es recomendable para principiantes ni público en general.

En el presente trabajo se inició tomando como base un sistema de transmisión por engranes rectos con los siguientes datos [6]:

Entrada: motor trifásico 1750 rpm, $P = 20$ Hp, NEMA A.

Salida: sistema transportador 670 rpm.

Velocidad de rotación $n_1 = 1750$ rpm.

Número de dientes del piñón $N_p = 21$.

Número de dientes del engrane $N_g = 55$.

Paso diametral $P_d = 10$.

Número de calidad AGMA $Q = 8$.

Ángulo de presión $\phi = 20^\circ$.

Para los datos complementarios se toma como base la norma AGMA 1012-F90 [7].

• Ancho de la cara del diente:

$$F = \frac{12}{P_d} = \frac{12}{10} = 1.2 \text{ in} \quad (1)$$

• Diámetro de paso del piñón:

$$D_p = \frac{N_p}{P_d} = \frac{21}{10} = 2.1 \text{ in} \quad (2)$$

• Diámetro de paso del engrane:

$$D_g = \frac{N_g}{P_d} = \frac{55}{10} = 5.5 \text{ in} \quad (3)$$

• Velocidad en la línea de paso:

$$V_t = (\pi - (2.1 \text{ in} - 1750 \text{ rpm}))/12 = 962.11 \text{ ft/min} \quad (4)$$

• Carga tangencial:

$$W_t = \frac{33000 P}{V_t} = \frac{33000(20 \text{ Hp})}{962.11 \text{ ft/min}} = 686 \text{ lb} \quad (5)$$

• Carga radial:

$$W_r = W_t \tan \phi = 686 \text{ lb} (\tan 20^\circ) = 250 \text{ lb} \quad (6)$$

• Carga total:

$$W = \sqrt{W_t^2 + W_r^2} = 730.13 \text{ lb} \quad (7)$$

La fórmula fundamental para calcular los esfuerzos de contacto en los dientes de un engrane helicoidal es [4,8-10]:

$$\sigma_c = C_p \sqrt{W_t K_0 K_v K_s \frac{K_m C_f}{F d I}} \quad (8)$$

donde:

σ_c	esfuerzo de contacto (lb/in ²).
C_p	coeficiente elástico.
K_0	factor de sobrecarga.
K_v	factor dinámico.
K_s	factor de tamaño.
K_m	factor de distribución de sobrecarga.
d	diámetro de paso (in).
I	factor geométrico para la picadura.
C_f	factor de condición de superficie.

El valor de cada factor de corrección es [5,11]:

$$\begin{aligned} C_p &= 2300 \\ K_o &= 1.0 \\ K_v &= 1.19 \\ K_s &= 1.0 \\ K_m &= 1.17 \\ I &= 0.098 \\ C_f &= 1.0 \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores correspondientes en la fórmula 8 se obtuvo el esfuerzo de contacto de acuerdo a la norma AGMA bajo las presentes condiciones.

$$\sigma_c = 143.04 \text{ ksi} \quad (9)$$

4.2. Análisis por el criterio de Hertz y de Buckingham

Para establecer una metodología apropiada se consideró que si dos cuerpos con superficies curvas se presionan entre sí, el contacto puntual o lineal cambia a un área de contacto y los esfuerzos que se desarrollan entre ambos cuerpos son tridimensionales [1]. Hertz estableció que cuando dos cilindros en contacto con diámetros d_1 y d_2 y de longitud l se presionan con una fuerza F se obtiene un área de contacto en forma de un rectángulo de ancho $2b$ y de longitud l y la distribución de la presión es semi-elíptica tal como se muestra en la figura 1 [2,10].

Si consideramos al módulo de elasticidad E y la relación de Poisson ν como las constantes elásticas respectivas de los dos cilindros, la ecuación para calcular el semiancho b de acuerdo a Hertz es [2, 9-10]:

$$b = \sqrt{\frac{2F}{\pi l} \frac{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}}} \quad (10)$$

y la presión máxima sobre el área de contacto es:

$$P_{\max} = \frac{2F}{\pi b l} \quad (11)$$

Tomando este fundamento como base, Buckingham [3] consideró a los dientes de dos engranes en contacto como dos cilindros paralelos donde el radio de los dientes es el radio de curvatura de la involuta y el punto de contacto lo definió como el punto de paso, esto es [1,3]:

$$R_1 = \frac{D_p}{2} \sin \phi \quad (12)$$

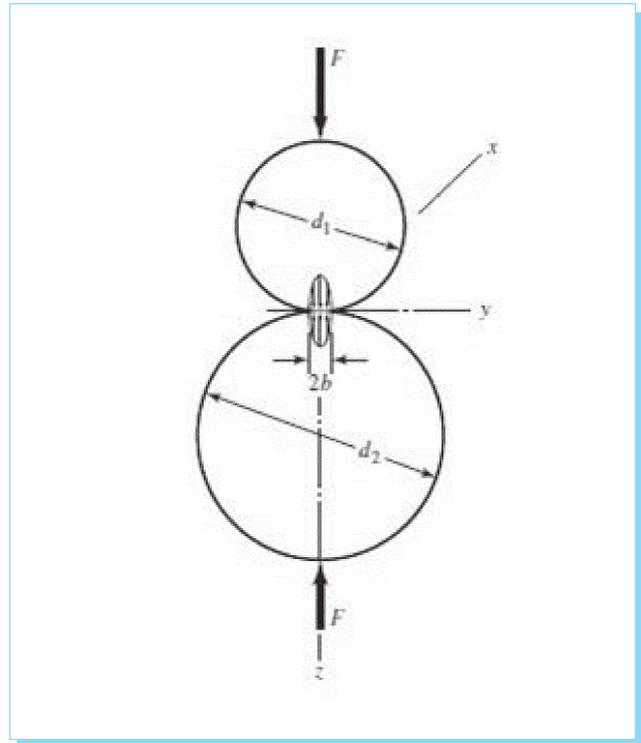


Fig. 1. Área de contacto $2b$.

$$R_2 = \frac{D_g}{2} \sin \phi = \frac{N_g D_p}{2N_p} \sin \phi \quad (13)$$

donde:

- R_1 y R_2 radio de curvatura de los dientes.
- D_p y D_g diámetros de paso del piñón y del engrane, respectivamente.
- N_p y N_g número de dientes del piñón y del engrane, respectivamente.
- ϕ ángulo de presión.

La figura 2 muestra la relación entre los radios de curvatura y el punto de paso o de contacto entre dos engranes [1,3].

Para el caso de dos dientes de engranes en contacto la ecuación se propone de la siguiente forma:

$$b = \sqrt{\frac{2W}{\pi F} \frac{\frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2}}{\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}}} \quad (14)$$

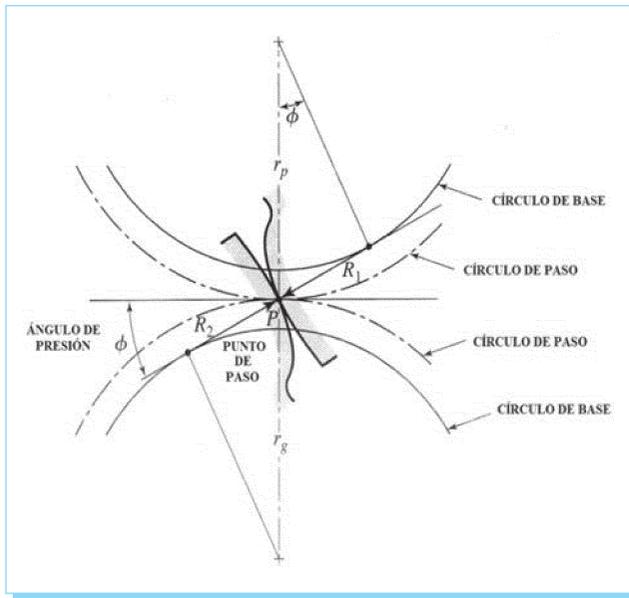


Fig. 2. Radios de curvatura de las superficies en contacto en el punto de paso.

donde:

- b semiancho del área de contacto rectangular entre la superficie de ambos dientes.
- W carga total de contacto.
- F ancho del diente.
- ν_1 relación de Poisson del piñón.
- ν_2 relación de Poisson del engrane.
- E_1 módulo de elasticidad del piñón.
- E_2 módulo de elasticidad del engrane.
- d_1 diámetro de curvatura del diente del piñón.
- d_2 diámetro de curvatura del diente del engrane.

Para la fórmula se consideró un acero 4340R que es una aleación de Cr-Ni-Mo recocido de alta templeabilidad adecuado para flechas y engranes con alta ductilidad y resistencia al choque cuyas constantes elásticas son [8,10]:

$$E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$$

$$\nu = 0.27$$

Sustituyendo en 12 y 13 los diámetros de curvatura de Buckingham son:

$$d_1 = d_p \text{ sen } \phi = (2.1 \text{ in}) \text{ sen } 20^\circ = 0.7182 \text{ in} \quad (15)$$

$$d_2 = d_g \text{ sen } \phi = (5.5 \text{ in}) \text{ sen } 20^\circ = 1.8811 \text{ in} \quad (16)$$

Sustituimos los datos en la ecuación 14 obteniendo el semiancho b :

$$b = \sqrt{\frac{2 (730 \text{ lb})}{\pi (1.2 \text{ in})} \frac{1 - (0.27)^2}{30 \times 10^6 \text{ psi}} + \frac{1 - (0.27)^2}{30 \times 10^6 \text{ psi}}}{\frac{1}{0.7182 \text{ in}} + \frac{1}{1.8811 \text{ in}}} = 0.0035 \text{ in} \quad (17)$$

El área de contacto es:

$$A = 2bF = 2(0.0035 \text{ in})(1.2 \text{ in}) = 0.0084 \text{ in}^2 \quad (18)$$

La presión máxima de contacto de acuerdo a Hertz es:

$$P_{\text{máx}} = \frac{2 (730 \text{ lb})}{\pi (0.0035 \text{ in}) (1.2 \text{ in})} = 110.65 \text{ ksi} \quad (19)$$

4.3 Análisis por ingeniería asistida por computadora

El software de diseño tiene la capacidad para el análisis de esfuerzo, dinámica de componentes y ensambles utilizando el método del elemento finito (MEF), que es una técnica numérica para analizar diseños de ingeniería, aceptado como el método de análisis estándar debido a su generalidad y compatibilidad para ser implementado en computadoras; el método divide el proceso en numerosas piezas pequeñas de formas simples llamadas "elementos" que reemplazan eficazmente un problema complejo por muchos problemas simples que deben ser resueltos en forma simultánea, los elementos comparten puntos comunes denominados nodos y al proceso de división del modelo en pequeñas piezas se denomina mallado; el comportamiento de cada elemento es bien conocido bajo todas las situaciones de soporte y carga posibles por lo que cada nodo se describe a detalle por un cierto número de parámetros, según el tipo de análisis o del elemento utilizado, el software formula las ecuaciones que rigen el comportamiento de cada elemento teniendo en cuenta su conectividad con los demás elementos, estas ecuaciones hacen referencia a la respuesta de cargas, restricciones y propiedades del material conocidas, así el programa organiza las ecuaciones en un conjunto mayor de ecuaciones algebraicas simultáneas y resuelve las desconocidas.

En el análisis de tensión, por ejemplo, el solver encuentra los desplazamientos en cada nodo, posteriormente, el programa calcula las deformaciones unitarias y, al final, las tensiones [11].

Para iniciar el análisis aplicando CAE y MEF se modeló el piñón por medio del software de diseño *SolidWorks from Dassault Systemes*, la figura 3 nos muestra la pieza [12].

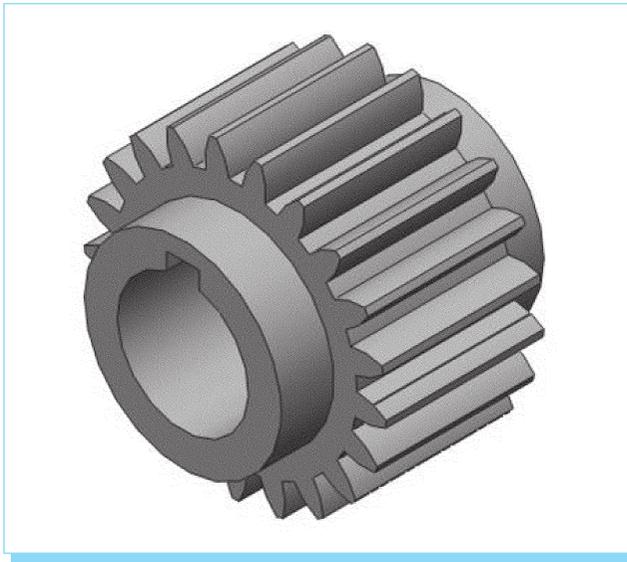


Fig. 3. Piñón modelado por medio de software.

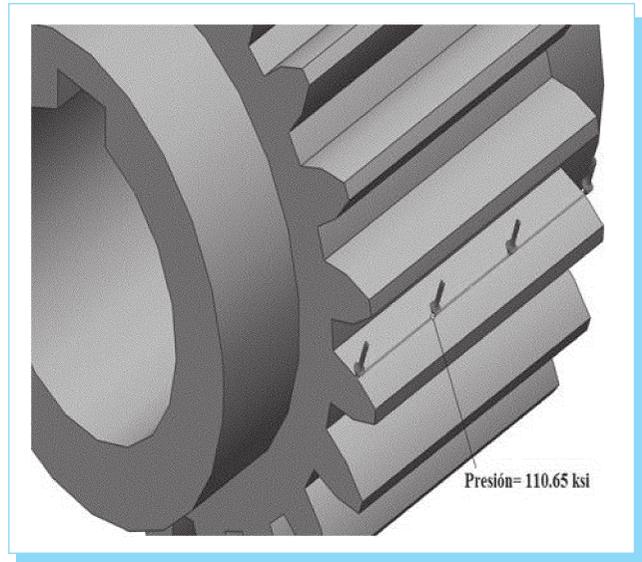


Fig. 5. Presión máxima aplicada sobre el área de contacto.

Wang y Howard, dicen que las condiciones de frontera y cargas en modelado por elementos finitos deben hacerse minuciosamente de manera que puedan simular condiciones de operación real [13], por lo que se toma el punto más crítico de funcionamiento que es cuando un solo par de dientes recibe toda la carga; con los datos obtenidos por los criterios de Hertz y de Buckingham se particionó el diente del piñón

para obtener un área de acuerdo a la fórmula 18 y cuyo eje esté en el círculo de paso, la figura 4 nos muestra, claramente, el resultado.

Utilizando *SolidWorks Simulation from Dassault Systemes* se inicia la simulación aplicando sobre el área de contacto una presión de 110.65 ksi (véase figura 5).

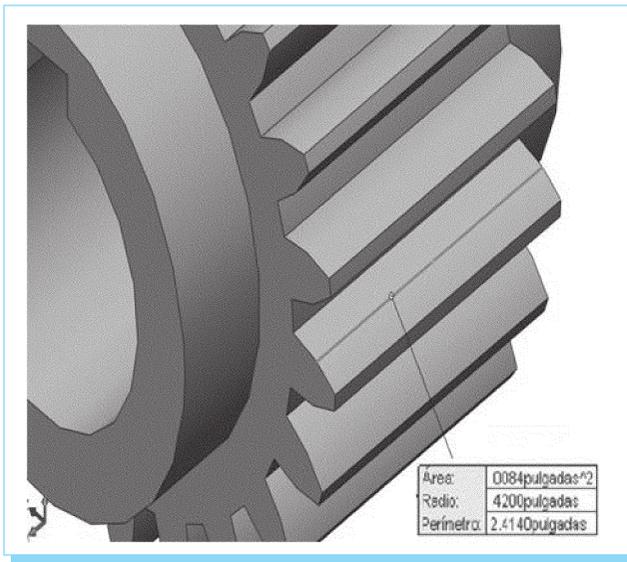


Fig. 4. Diente del piñón particionado.

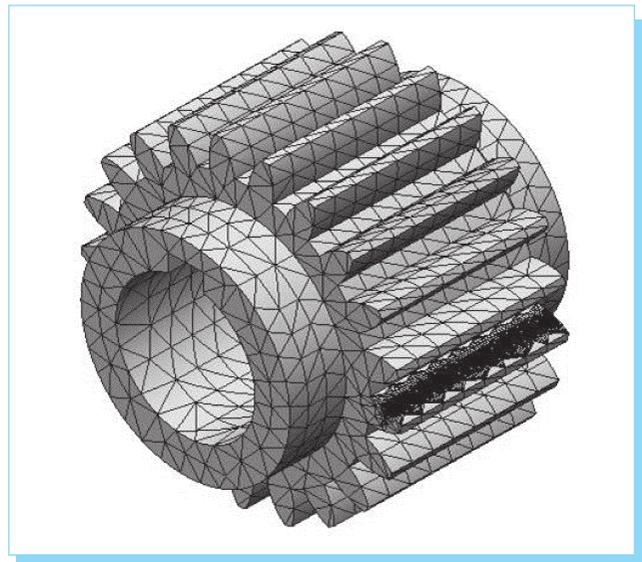


Fig. 6. Mallado del engrane.

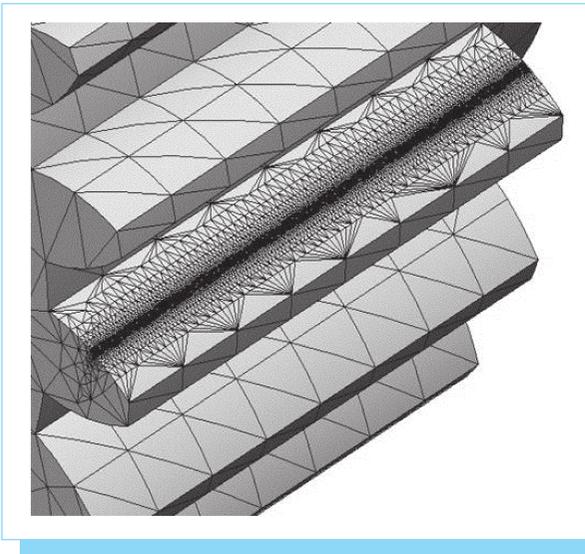


Fig. 7. Mallado fino sobre la cara del diente.

Para el análisis en el área bajo estudio se utilizó una densidad de malla fina y así garantizar resultados más precisos y confiables; con un mallado de 4928 elementos se obtuvo un tamaño individual de 0.00195007 pulgadas sobre el área particionada (véanse figuras 6 y 7).

Establecemos la restricción del modelo para sujetarlo en la parte interior donde se monta el eje, la figura 8 nos muestra esta operación, finalmente se ejecuta el modelo aplicando el

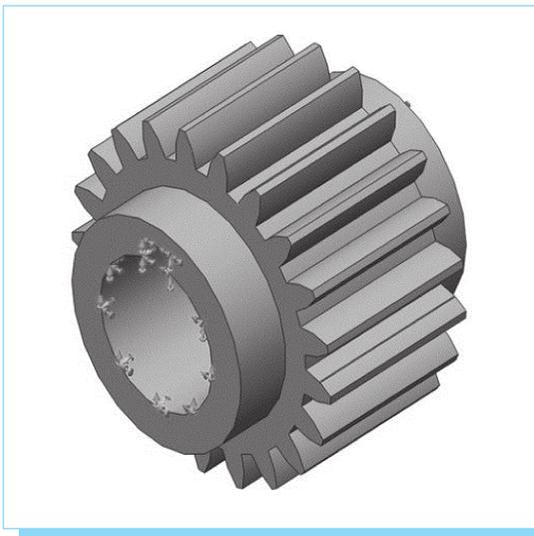


Fig. 8. Sujeciones sobre el modelo.

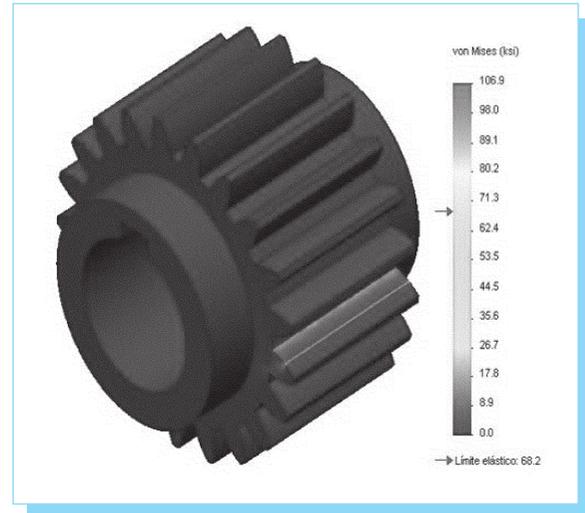


Fig. 9. Resultado del análisis.

método de elementos finitos sobre el piñón considerando las propiedades del material seleccionado y las restricciones mecánicas (sujeciones), las figura 9 y 10 nos muestran los resultados obtenidos [11-12, 14-17].

De acuerdo al análisis desarrollado en CAE el esfuerzo de contacto máximo es $\sigma_c = 106.90$ ksi (véase figura 11).

La figura nos indica que el esfuerzo máximo está en el filete del diente que como es obvio se considera la parte más frágil, sin embargo, este también se presenta en toda la línea

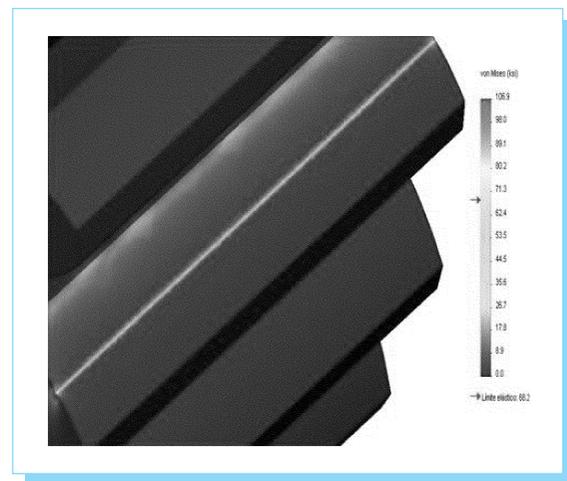


Fig. 10. Área de contacto.



Fig. 11. Esfuerzo de contacto máximo.

correspondiente a el área de contacto durante el proceso de engranaje.

Tabla 1. Datos para el análisis de esfuerzos de contacto de diversos engranes rectos aplicando normas AGMA y CAE.

DATOS	ESTUDIO 1	ESTUDIO 2	ESTUDIO 3	ESTUDIO 4	ESTUDIO 5
Potencia Hp	60	40	10	18	5
Vel. rpm	600	1200	3000	2400	1800
N_p	26	35	55	21	21
N_g	35	55	135	26	55
P_d	5	6	12	10	16
Q	6	6	10	8	6
C_p	2300	2300	2300	2300	2300
W_t (lb)	2424.05	720.29	91.67	450.18	266.77
K_0	1	1	1	1	1
K_v	1.07	1.1	1.61	1.22	1.06
K_s	1	1	1	1	1
K_m	1.21	1.19	1.17	1.16	1.14
C_f	1	1	1	1	1
F (in)	2.4	2	1	1.2	0.75
D_p PINÓN	5.20	5.83	4.58	2.10	1.31
D_p ENGRANE	7.00	9.17	11.25	2.60	3.44
l	0.09	0.10	0.12	0.08	0.10
V_t	816.82	1832.60	3599.75	1319.47	618.50
W	2579.62	766.51	97.56	479.07	283.89
d_1 (in)	1.78	2.00	1.57	0.72	0.45
d_2 (in)	2.39	3.14	3.85	0.89	1.18
b (in)	0.00657	0.00429	0.00207	0.00250	0.00220
$2b$ (in)	0.01314	0.00858	0.00414	0.00500	0.00440
AREA (in ²)	0.03153	0.01715	0.00414	0.00600	0.00330
$P_{máxima}$ (ksi)	104.16	56.90	30.04	101.73	109.55

Tabla 2. Resultados obtenidos de la simulación numérica de cada estudio.

ESFUERZO DE CONTACTO	ESTUDIO 1	ESTUDIO 2	ESTUDIO 3	ESTUDIO 4	ESTUDIO 5
AGMA ksi	122.95	66.73	41.27	127.71	132.96
CAE ksi	101.08	49.00	28.51	95.18	112.40

5. Resultados

Observando detalladamente, vemos que el resultado obtenido bajo las normas AGMA presenta una variación aproximada del 25% al que se obtuvo aplicando el software de CAE, esto se puede justificar debido a que en el MEF no se consideran factores de corrección por lo que se realizan otros estudios con diferentes datos mostrados en la tabla 1 para complementar mejor esta observación. Los resultados obtenidos en cada estudio se muestran en la tabla 2.

La figura 12 nos muestra una gráfica comparativa entre los resultados de ambos métodos.

En la gráfica podemos observar que la curva CAE presenta una tendencia similar a la curva teórica AGMA, también observamos que en el estudio 3 el error es más pronunciado siendo los estudios 1 y 5 los que presentan una mayor similitud con el análisis teórico, teniendo un promedio de error de 23.24% en general.

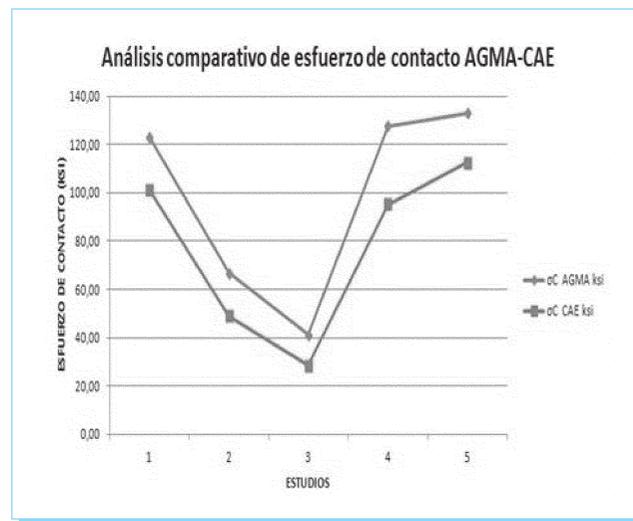


Fig. 12. comparativo de resultados AGMA-CAE.

6. Discusión de resultados

Los esfuerzos de contacto obtenidos con los estudios realizados por medio de las simulaciones numéricas aplicando CAE y los esfuerzos según las normas AGMA fueron muy similares, no obstante, ambas presentan condiciones que debemos tener en cuenta para un análisis confiable y un diseño seguro, sin embargo, ambas metodologías son válidas ya que AGMA sigue vigente para los diseñadores y CAE empieza a tomar fuerza debido al avance continuo de los sistemas computacionales y de los programas de diseño comerciales.

7. Conclusiones

- De acuerdo a los resultados obtenidos podemos considerar que aplicando los criterios de Hertz y de Buckingham con CAE se obtienen simulaciones numéricas confiables y seguras con un margen de error aceptable comparado con los resultados de AGMA.
- Las normas AGMA se debe usar preferentemente por un diseñador con experiencia debido a los criterios que se deben tomar en cuenta para los factores de corrección.
- Es importante usar un software de nivel reconocido que cuente con una aceptable capacidad de recursos computacionales.
- Si se aplica CAE se debe contar con experiencia reconocida en el manejo de software de diseño, ya que si la pieza es modelada de forma incorrecta los resultados obtenidos no serán confiables.

8. Referencias

- [1] A.C.Ugural, *Mechanical Design An Integrated Approach*, International Edition, McGrawHill, New York, 2004.
- [2] H. Hertz, "Über die Berührung fester Elastischer Körper", *Gesammelte Werke*, vol. 1, Leipzig, 1985.
- [3] E. Buckingham, *Analytical Mechanics of Gears*, McGrawHill, New York, 1949.
- [4] American Gear Manufacturers Association Norma 2001-D-04, *Fundamental Rating Factors and Calculations Methods for Involute Spurs an Helical Gear Teeth*, Virginia, USA, AGMA 2004.
- [5] American Gear Manufacturers Association Norma 908-B89 *Geometry Factors for Determining the Pitting Resistance and Bending Strength of Spur, Helical and Herringbone Gear Teeth*, Virginia, USA, AGMA 1990.
- [6] S. J. Carro, S. F. Flores, y N. I. Flores, "Análisis comparativo de diseño bajo normas AGMA y por Método del Elemento Finito para engranes rectos", presentado en el *Coloquio Internacional de Investigación Multi-disciplinario CIM-2011*, Orizaba Ver., 2011.
- [7] American Gear Manufacturers Association. Norma 1012-F90, *Gear Nomenclature, Definitions of Terms with Symbols*, Virginia, USA, AGMA 1990.
- [8] R. L. Mott, *Diseño de elementos de máquinas*, 4ª ed., Pearson Prentice Hall, México, 2004.
- [9] R. L. Norton, *Diseño de máquinas*, Pearson Prentice Hall, México, 1999.
- [10] E. J. Shigley, y C. R. Mischke, *Diseño en ingeniería mecánica*, 6ª ed., McGrawHill, México 2002.
- [11] S. J. Carro, N. I. Flores, y S. F. Flores, "Propuesta de una metodología para el análisis de engranes rectos aplicando Ingeniería Asistida por Computadora", presentado en el *10º Congreso Nacional de Mecatrónica*, Puerto Vallarta Jal., 2011.
- [12] G. S. Gómez, *El gran libro de SolidWorks*, Marcombo Ediciones Técnicas, Barcelona, 2008.
- [13] J. Wang, y I. Howard, "Error Analysis of Finite Element Modeling of Involute Spur Gears", *Journal of Mechanical Design*, 2006.
- [14] G. S. Gómez, *SolidWorks Simulation*, Alfaomega Rama, Madrid, 2010.
- [15] G. H. L. Infanzon, "Análisis de esfuerzo de contacto en engranajes cilíndricos de ejes paralelos de perfil evolvente mediante el método de elementos finitos", Tesis de licenciatura Pontificia Universidad Católica del Perú, Lima, 2010.
- [16] W. Zeping, "Stresses and deformation in involute spurs gears by finite element method", Thesis Master of Science in the Department of Mechanical Engineering, University of Saskatchewan Saskatoon, Saskatchewan 2004.
- [17] R. Chacón, "Programa de Simulación para Engranajes de dientes rectos por elementos finitos", *Revista Ciencia e Ingeniería*, vol. 32, núm. 3, noviembre, 2011.

Directory of Open Access Journals (DOAJ)

20% of peer-reviewed articles are now freely available, <http://www.doaj.org>