

Análisis de un modelo de optimización para reducir al mínimo el contragolpe angular en un tren de engranajes

Luis Orlando **Cotaquispe-Zevallos**

Facultad de Ciencias e Ingeniería,
Pontificia Universidad Católica del Perú.
Av. Universitaria 1801, San Miguel, Lima.
PERÚ.

correo electrónico (email): lcotaqu@pucc.edu.pe

Recibido el 25 de noviembre de 2010; aceptado el 30 de junio de 2011.

1. Resumen

Un modelo de optimización se construye para seleccionar las relaciones de reducción óptima que minimicen el contragolpe angular total en un tren de engranajes, con limitaciones en relación de reducción total y espacio disponible. Se ha encontrado que un diseño adecuado de relaciones de reducción tiene un efecto importante en el contragolpe angular total de un tren de engranajes.

Palabras clave: tren de engranajes, holgura angular, optimización.

2. Abstract (Analysis of an optimization model to minimize the angular backlash in a gear train)

An optimization model is constructed to select the optimum gear ratios that minimize the total angular backlash in a gear train, with limited total reduction ratio and space available. It has been found that a suitable design of reduction ratio has an important effect on the total angular backlash of a gear train.

Key words: gear train, clearance angle, optimization.

3. Introducción

En máquinas de precisión, la función principal de los sistemas de transmisión de engranajes es transmitir con precisión

el desplazamiento angular. En estas aplicaciones, el contragolpe del engranaje provoca un error de posición angular inesperado cuando un tren de engranajes girando invierte, y también se induce una fuerza de impacto transitorio en la superficie del engranaje de acoplamiento debido al momento de inercia del sistema.

Hay gran cantidad de literatura de investigación que aborda el diseño de los engranajes de precisión. Los requisitos del diseño fueron considerados diversos, en particular, reducir al mínimo el error de transmisión, lo cual ha recibido muchas atenciones desde minimizar el error de transmisión estática con splines cúbicos de dientes de engranajes de perfil hasta modificar el perfil de los dientes para reducir al mínimo el error en la transmisión de engranajes helicoidales. Mientras que el analista Shibata [1] trató de encontrar el perfil óptimo de los dientes que minimiza el error en la transmisión de engranajes hipoide. Los asesores de las Normas ISO [2] intentaron modificar el perfil de los dientes de evolvente con la premisa de encontrar uno óptimo y robusto (corrección positiva) que logre obtener una transmisión de error mínimo.

Sin embargo, la modificación del perfil del diente con el fin de minimizar el error de transmisión no puede ser una opción práctica para muchos diseñadores de maquinarias de precisión. Normalmente, las decisiones de diseño que enfrentan los diseñadores son la forma de seleccionar la reducción de proporciones adecuadas, grados de calidad del engranaje y las tolerancias apropiadas, por lo que la precisión que requiere un sistema de transmisión de engranajes se puede obtener de una forma más rentable.

En esta investigación, se comprueba que un diseño adecuado de relaciones de reducción de una etapa del tren de multiengranajes tiene un efecto importante sobre su reacción angular total. Un modelo de optimización se construye para encontrar las razones de la reducción óptima que minimicen el contragolpe angular total de un tren de engranajes, con limitaciones en relación de reducción total y el espacio disponible.

4. Contragolpe angular de un tren de engranajes

Los factores que contribuyen al contragolpe angular proceden principalmente de dos fuentes: *a)* errores de fabricación original y *b)* errores de montaje, tales como la tolerancia en la distancia del centro, la tolerancia del cojinete, la tolerancia del eje y del cojinete, etc. En este estudio se consideran los errores originales de fabricación y la tolerancia en la distancia del centro.

Los errores de fabricación original de un engranaje se especifican por su grado de calidad. Los grados de calidad de los engranajes de dientes rectos y helicoidales varían en un rango de 0 a 9 en la norma JIS B 1703 [3], y va de 0 a 12 en norma ISO 1328 [4]. Estas dos normas también tienen ligeras diferencias en la estimación del error para cada calidad. De acuerdo con JIS B 1703 (1995), la reacción lineal en la línea de la holgura δ se calcula por

$$\delta = B \times 10^{-3} (\sqrt[3]{2r} + 0.65m) \quad (1)$$

Donde r y m son el radio y el módulo del engranaje. El grado de calidad se refleja en el coeficiente B en la ecuación (1). Por ejemplo, el B tiene rangos de valores de 10 a 25 para engranajes de grado 0 (la mejor calidad), a partir del 10 al 28 para los engranajes de grado 1, y a partir de 10 a 90 para los engranajes del grado 8.

La figura 1 muestra el diseño del tren de engranajes de tres etapas típico. Las cocientes de la reducción de los tres pares de engranajes son k_1 , k_2 y k_3 . La reacción angular de transmisión $\Delta\theta_i$ se puede expresar como:

$$\Delta\theta_i = \delta_i / r_i \quad (2)$$

Donde δ_i es la reacción lineal, y r_i es el radio de transmisión i . La reacción angular total se puede expresar como una suma lineal de los contragolpes de engranajes individuales, que se refleja en el eje de salida del tren de engranajes [5]. Para el tren de engranaje en la figura 1, la reacción angular total debido a errores de fabricación original se refleja en el eje del engranaje 6 y se puede expresar como,

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{6m} &= (\delta_6/r_6) + \frac{(\delta_5/r_5)}{k_3} + \frac{(\delta_4/r_4)}{k_3} + \frac{(\delta_3/r_3)}{k_2 k_3} + \frac{(\delta_2/r_2)}{k_2 k_3} + \frac{(\delta_1/r_1)}{k_1 k_2 k_3} \\ &= \frac{\delta_6 + \delta_5}{r_5 k_3} + \frac{\delta_4 + \delta_3}{r_3 k_2 k_3} + \frac{\delta_2 + \delta_1}{r_1 k_1 k_2 k_3} \end{aligned} \quad (3)$$

se debe tener en cuenta que $r_6 = r_5 k_3$, $r_4 = r_3 k_2$ y $r_2 = r_1 k_1$.

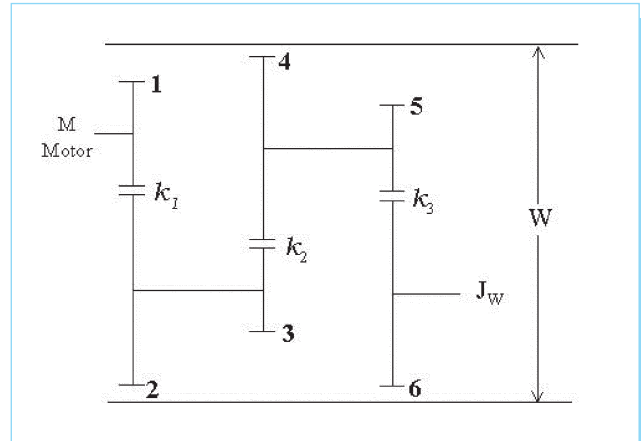


Fig. 1. Sistema de transmisión de engranajes de tres etapas.

Teniendo en cuenta las distancias de centro de la tolerancia, como se muestra en la figura 2, el efecto de una separación radial en la reacción es lineal

$$\delta = 2C \times \tan \phi \quad (4)$$

Donde δ y C son el ángulo de presión y la distancia de la tolerancia central, respectivamente. Al igual que en la derivación de la ecuación. (3), el contragolpe angular total debido a la tolerancia del centro de la distancia se refleja en el eje del engranaje 6 y se puede expresar como,

$$\Delta\theta_{6c} = 2C \tan \phi_6 \left[\frac{1}{r_5 k_3} + \frac{1}{r_3 k_2 k_3} + \frac{1}{r_1 k_1 k_2 k_3} \right] \quad (5)$$

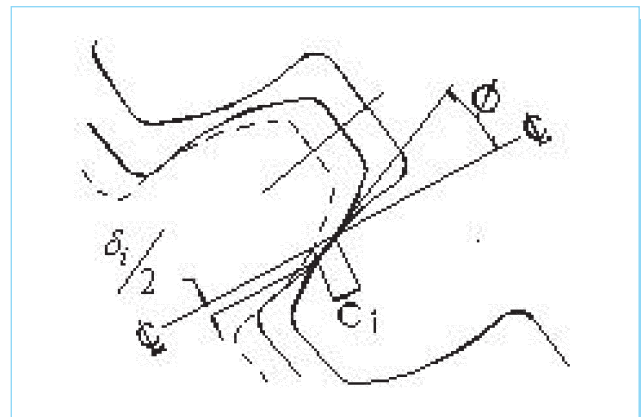


Fig. 2. Influencia de la tolerancia de la distancia entre centros con el contragolpe.

Será complicado considerar todas las posibles combinaciones de los signos (más o menos) de las tolerancias individuales. Por lo tanto el contragolpe angular total en el eje de salida de un tren de engranajes $\Delta\theta_{out}$ se expresa como la suma geométrica de las tolerancias individuales $\Delta\theta_{6m}$ y $\Delta\theta_{6c}$,

$$\Delta\theta_{out} = (\Delta\theta_{6c}^2 + \Delta\theta_{6m}^2)^{1/2} = \left[\left[\frac{\delta_6 + \delta_5}{r_5 k_3} + \frac{\delta_4 + \delta_3}{r_3 k_2 k_3} + \frac{\delta_2 + \delta_1}{r_1 k_1 k_2 k_3} \right]^2 + 4C^2 \tan \phi \left[\frac{1}{r_5 k_3} + \frac{1}{r_3 k_2 k_3} + \frac{1}{r_1 k_1 k_2 k_3} \right]^2 \right]^{1/2} \quad (6)$$

5. El modelo de optimización

Un modelo de optimización para una fase del tren de engranajes-múltiples se construye en esta sección. La función objetivo es minimizar la reacción angular total del tren de engranajes (véase ecuación (6)). Hay dos limitaciones en este modelo: el espacio disponible en el total y el porcentaje de reducción total del tren de engranajes.

Refiriéndose a la figura 1, el espacio permitido ocupado por el tren de engranajes es limitado dentro de un determinado valor de W ,

$$\begin{aligned} 2(r_2 + r_1) &\leq W \\ 2r_4 + r_3 + r_2 &\leq W \\ 2r_6 + r_5 + r_4 &\leq W \end{aligned} \quad (7)$$

El factor de reducción total del tren de engranaje debe ser mayor que K_r , por lo tanto

$$k_1 k_2 k_3 \leq K_r \quad (8)$$

Por último, el modelo de optimización se puede escribir como

$$\Delta\theta_{out} = \left[\left[\frac{\delta_6 + \delta_5}{r_5 k_3} + \frac{\delta_4 + \delta_3}{r_3 k_2 k_3} + \frac{\delta_2 + \delta_1}{r_1 k_1 k_2 k_3} \right]^2 + 4C^2 \tan \phi \left[\frac{1}{r_5 k_3} + \frac{1}{r_3 k_2 k_3} + \frac{1}{r_1 k_1 k_2 k_3} \right]^2 \right]^{1/2}$$

Para reducir el modelo al mínimo se estará condicionando a lo siguiente:

$$g_1: 2(r_2 + r_1) - W \leq 0$$

$$g_2: 2r_4 + r_3 + r_2 - W \leq 0$$

$$g_3: 2r_6 + r_5 + r_4 - W \leq 0$$

$$h_1: K_r - k_1 k_2 k_3 = 0$$

$$h_2: r_2 / r_1 - k_1 = 0$$

$$h_3: r_4 / r_3 - k_2 = 0$$

$$h_4: r_6 / r_5 - k_3 = 0$$

$$h_5: \delta_1 - B \times 10^{-3} (\sqrt[3]{2r_1} + 0.65M) = 0$$

$$h_6: \delta_2 - B \times 10^{-3} (\sqrt[3]{2r_2} + 0.65M) = 0$$

$$h_7: \delta_3 - B \times 10^{-3} (\sqrt[3]{2r_3} + 0.65M) = 0$$

$$h_8: \delta_4 - B \times 10^{-3} (\sqrt[3]{2r_4} + 0.65M) = 0$$

$$h_9: \delta_5 - B \times 10^{-3} (\sqrt[3]{2r_5} + 0.65M) = 0$$

$$h_{10}: \delta_6 - B \times 10^{-3} (\sqrt[3]{2r_6} + 0.65M) = 0$$

$$r_i \geq N_{min} \cdot M, i = 1, \dots, 6; 1 < k_i < K_{max}, i = 1, \dots, 3 \quad (9)$$

Las dos últimas restricciones de la ecuación (9) presentan los límites superior e inferior de las variables de diseño i , k_i y r , donde la estimación mínima es el mínimo número de dientes de los engranajes, y un máximo de K es el factor de reducción máxima permisible. Tener en cuenta que W , K_r , B , C , M , N_{min} y un máximo de K se escriben en letras mayúsculas para representar parámetros que se dan para un caso determinado, pero pueden variar de un caso a otro.

6. La solución del modelo de optimización

Para resolver los valores numéricos de este modelo de optimización, lo primero es asumir una serie de parámetros: $W = 100$ mm, $K_r = 120$, $B = 30$ mm, $C = 0.020$ mm, $N_{min} = 18$, $K_{max} = 7$ y $M = 0.5$ mm. En este estudio de optimización numérica se utiliza el software GAMS [5], el cual sirve para resolver las relaciones de reducción óptima que minimicen el contragolpe angular total del tren de engranajes (véase tabla 1). Dado que el número de dientes tiene que ser un número entero, los radios de los engranajes se redondean al más cercano enteros multiplicado por $M/2$. Ambas soluciones enteras y continuas se presentan en la tabla 1. Hay que tener en cuenta que con la solución entera, algunas de las limitaciones de la ecuación (9) pueden estar levemente modificadas.

Tabla 1. Cocientes óptimos de la reducción que minimizan el contragolpe angular total.

	$\Delta\theta_{out}$	k_1	k_2	k_3	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
Solución continua	7.18×10^{-3}	3.53	4.85	7.00	11.03	38.97	4.50	21.83	5.21	36.47
Solución entera	7.20×10^{-3}	3.55	4.83	6.95	11.00	39.00	4.50	21.75	5.25	36.50

Tabla 2. Cocientes óptimos de la reducción que maximizan el contragolpe angular total.

	$\Delta\theta_{out}$	k_1	k_2	k_3	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
Solución continua	18.08×10^{-3}	7.00	7.00	2.45	4.50	31.50	4.50	31.50	4.50	11.02
Solución entera	18.12×10^{-3}	7.00	7.00	2.44	4.50	31.50	4.50	31.50	4.50	11.00

La tabla 2 muestra los cocientes de reducción que maximizan el contragolpe angular total del tren de engranajes bajo los mismos requisitos sobre el espacio y la relación de reducción total. Comparando la tabla 1 y 2, podemos ver que simplemente variando los cocientes de la reducción, el contragolpe angular máximo total es de 2.52 veces el contragolpe angular mínimo total en este ejemplo. Tener en cuenta que en ambos casos los engranajes tienen el mismo grado de calidad y la misma tolerancia en la distancia entre ejes, por lo tanto sus costos de fabricación deben ser los mismos.

También debe tenerse en cuenta que $k_1 \leq k_2 \leq k_3$ son los cocientes de reducción que minimizan el contragolpe angular total. Por el contrario, $k_1 \geq k_2 \geq k_3$ son los cocientes de reducción que maximizan el contragolpe angular total. Esto puede explicarse fácilmente por la observación de la función objetivo en la ecuación (6). El factor de reducción k_3 aparece en los denominadores de los seis términos de la función objetivo, mientras que k_2 aparece en los denominadores de cuatro términos y, k_1 aparece en los denominadores de sólo dos términos. Luego para minimizar el contragolpe angular total, se tiene que obviamente k_3 tiene la máxima prioridad a ser tan grande como sea posible. El factor de reducción k_2 tiene la segunda prioridad, seguido por k_1 .

En la solución óptima que se muestra en la tabla 1, las limitaciones de espacio g_1 y g_3 están activos. El contragolpe angular

total puede reducirse aún más si las limitaciones de espacio se flexibilizan. Como se muestra en la figura 3, para el mismo tren de engranajes que se discutió anteriormente, el contragolpe angular mínimo disminuye a medida que aumenta W total.

En las figuras 4 y 5 se muestra el cambio de un mínimo de holgura angular total con respecto a la modificación de los parámetros B y C . Comparando las figuras 4 y 5, se puede observar que el contragolpe angular total es más sensible al parámetro B en este caso. A partir de este tipo de análisis de los parámetros, los diseñadores pueden evaluar el costo de cambiar a engranajes de más alta calidad y el costo del ajuste de la tolerancia en la distancia entre ejes, para decidir cómo reducir el contragolpe angular total de una forma más rentable.

7. Conclusiones

1. El trabajo presenta un modelo de optimización para encontrar las relaciones de la reducción óptima que minimicen el contragolpe angular total de un tren de engranajes. Si bien la estimación de contragolpe angular total en el modelo de optimización no puede ser cuantitativamente exacta debido a los números enteros de los dientes de los engranajes.

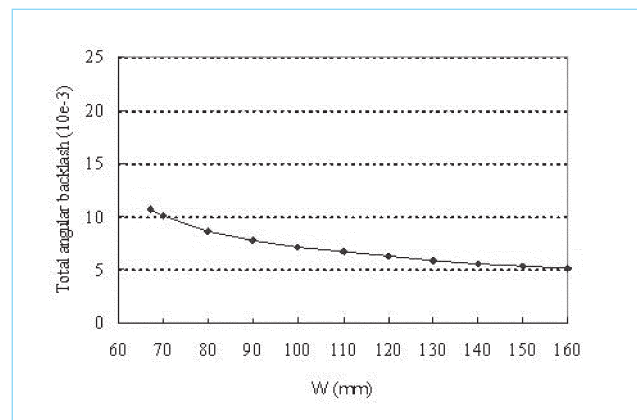


Fig. 3. Total mínimo contragolpe angular vs cambio de espacio disponible.

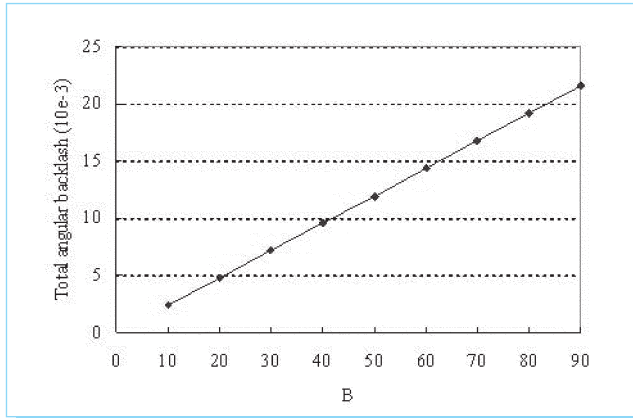


Fig. 4. Contragolpe angular mínimo total vs el cambio del parámetro B en la calidad.

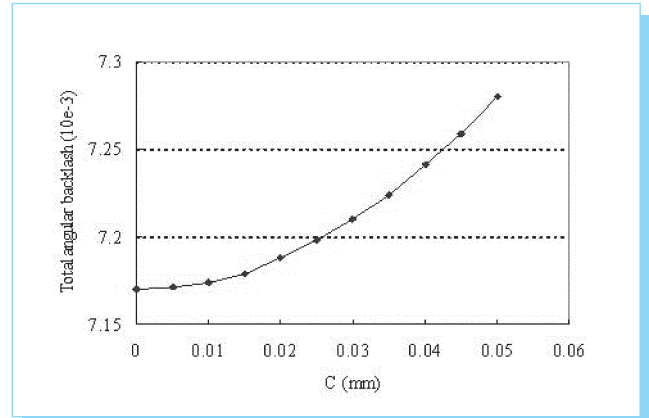


Fig. 5. Contragolpe angular mínimo total vs cambio de la tolerancia en la distancia entre centros.

2. Conforme a los mismos requisitos del diseño, para el espacio y la relación de reducción total se tiene que simplemente variando los coeficientes de reducción se puede reducir el contragolpe angular total de un tren de engranajes, mientras que el costo de fabricación es el mismo.
3. Para reducir al mínimo el contragolpe angular total de un tren de engranajes, la relación de reducción más cerca del eje de salida tiene mayor prioridad debido a que puede hacerse tan grande como sea posible.
4. El contragolpe angular total puede reducirse aún más si las limitaciones del espacio disponible se flexibilizan.
5. Este modelo de optimización y el análisis de los parámetros también proporcionan un medio para evaluar cómo reducir el contragolpe angular total de un tren de engranajes de una forma más rentable.

8. Rerefencias

- [1] Y. Shibata, y N. Kondou, "Diseño óptimo del perfil de diente de un engranaje hipoide". *JSAE*. vol. 18, núm. 3, 1997.
- [2] Norma ISO 6336, "Cálculo de la capacidad de carga en engranajes cilíndricos de dientes rectos y helicoidales". 1996.
- [3] JIS B1703, "Contragolpe de estímulo y engranajes helicoidales". 1995. *Manual de JIS*, Elementos de la máquina, (japonés) Standards Association.
- [4] Norma ISO 1328-1. Cylindrical gears, ISO system of accuracy, Part 1: "Definitions and allowable values of deviations relevant to corresponding flanks of gear teeth". 1995.
- [5] Brooke, Kendrick y Meeraus. *GAMS, Guía del usuario tipo A*, Prensa Científica, South San Francisco, California, USA, 1992.

Portal de portales Latindex

1 179 952 artículos a texto completo

<http://www.latindex.ppl.unam.mx/>