

Análisis cinemático y dinámico de sistema mecánico para silla de ruedas empleando multiplicadores de Lagrange

Mauricio Galán¹

José Godina²

Juan Alfonso Beltrán-Fernández³

¹ Departamento de Ingeniería y Desarrollo de Nuevos Productos, Mailhot de México, Circuito Mexiamora pte. 140, Parque Industrial Santa Fe, Puerto Interior, CP 36100, Silao, Guanajuato, MÉXICO.

² Departamento de Física, Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, Av. Instituto Politécnico Nacional 2508, Col. San Pedro Zacatenco, CP 07360, México, DF, MÉXICO.

³ Sección de Estudios de Posgrado e Investigación, Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Zacatenco, Instituto Politécnico Nacional, Unidad Profesional Adolfo López Mateos, Col. Lindavista, CP 07738, México, DF, MÉXICO.

correo electrónico (email): mgalan@mailhotdemexico.com
jj@fis.cinvestav.mx

Recibido el 10 de agosto de 2010; aceptado el 5 de mayo de 2011.

1. Resumen

Este artículo describe el proceso de análisis matemático de un dispositivo mecánico que se ha diseñado para ser adaptado a una silla de ruedas, las ecuaciones de movimiento en el plano del dispositivo se formulan a partir de las ecuaciones de Euler Lagrange de la mecánica clásica, asimismo las restricciones no holonómicas del sistema son caracterizadas por multiplicadores de Lagrange, la integración de ambos conceptos matemáticos son parte de la formulación de un modelo cinemático que es el fundamento del análisis dinámico del sistema, además de la implementación de leyes de control. Los parámetros cinemáticos se describen dentro de un sistema de referencia inercial de tres dimensiones comúnmente empleado entre los ingenieros mecánicos. Las ecuaciones que describen el movimiento de este sis-

tema mecánico son el resultado del análisis matemático, esta metodología puede ser aplicada al análisis de cualquier sistema dinámico sometido a las condiciones inerciales de la Tierra.

Palabras clave: cinemática, silla de ruedas, ecuaciones de movimiento, multiplicadores de Lagrange, restricciones no holonómicas.

2. Abstract (Kinematic and Dynamic Analysis of Mechanical Wheelchair by Using Lagrange Multipliers)

This article describes the process of mathematical analysis of a mechanical device that is designed to be adapted to a wheelchair, the equations of motion in the plane of the device has been made from the Euler Lagrange equations of classical mechanics, also non holonomic constraints of the system are characterized by Lagrange multipliers, integration of both mathematical concepts are a part of the formulation of a kinematic model which is the foundation of dynamic system analysis and implementation of control laws. The kinematic parameters are described in a three-dimensional inertial reference system commonly used by mechanical engineers. The equations describing the motion of this mechanical system are the result of mathematical analysis; this methodology can be applied to the analysis of any dynamic system subject to the Earth inertial conditions.

Key words: kinematics, wheelchair, equations of motion, Lagrange multipliers, non holonomic constraints.

3. Introducción

El crecimiento poblacional en las ciudades más importantes del mundo trae consigo un sinnúmero de repercusiones entre las que se encuentra el aumento considerable de la discapacidad, que se origina por diversos factores como son accidentes o malformaciones genéticas entre otros, de los cuales los relacionados con accidentes generalmente terminan con lesiones que pueden ir desde leves hasta críticas, las lesiones de columna vertebral son muy recurrentes, por lo que el número de personas que requieren el uso de sillas de ruedas también aumenta, en nuestro país el número de personas que se ven en la necesidad de utilizar silla de ruedas crece dramáticamente [1], lamentablemente, la mayoría son gente joven con proyectos

de vida que se ven severamente afectados al presentarse alguna eventualidad de este tipo. Generalmente las personas que requieren del uso de una silla de ruedas se debe a lesiones neurológicas de la columna vertebral. Cuando la médula espinal es afectada, se produce una complicación que se deriva en la pérdida del movimiento y de la sensibilidad dependiendo de la zona y agudeza de la lesión [2]. Actualmente se han hecho importantes estudios sobre los efectos en la columna vertebral después de una intervención quirúrgica [3].

Las actividades de la vida moderna nos obligan a trasladarnos de un lugar a otro con mucha frecuencia, una de las grandes limitantes de las personas que usan silla de ruedas es la falta de movilidad independiente; la falta de movilidad o movilidad limitada a una silla de ruedas es un tema que se aborda desde muchas perspectivas, pero el objetivo debe ser siempre favorecer a los usuarios de sillas de ruedas con medios autónomos que les brinden mayor movilidad de forma segura y por consecuencia una mejor calidad de vida.

El concepto de silla de ruedas ha cambiado radicalmente con los años [4], ahora se habla de sistemas autónomos que le confieren mayor movilidad a los usuarios de manera independiente, algunos sistemas de movilidad como el *ibot* [5] se han desarrollado para realizar tareas complicadas como lo es el ascenso y descenso de escaleras, estos sistemas están basados en un análisis cinemático y dinámico detallado, aunado a ello el desarrollo de algoritmos de control que le permiten a los sistemas realizar actividades relevantes que contribuyen en gran medida a la independencia de los usuarios de sillas de ruedas [6].

El tema de este artículo es el análisis cinemático y dinámico en el plano horizontal de un dispositivo de seis ruedas (figuras

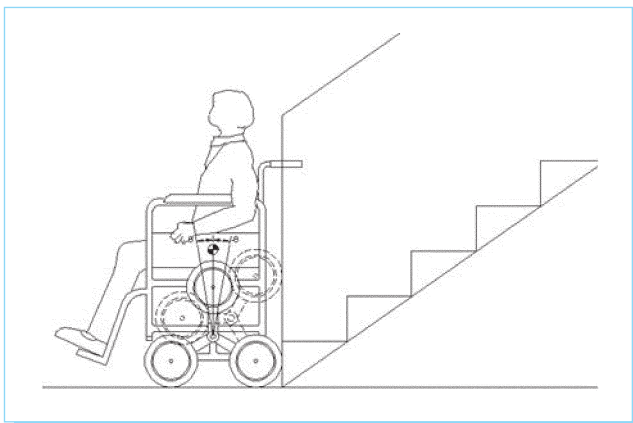


Fig. 1. Representación de la silla de ruedas con el acoplamiento del sistema de seis ruedas para transitar en escaleras.

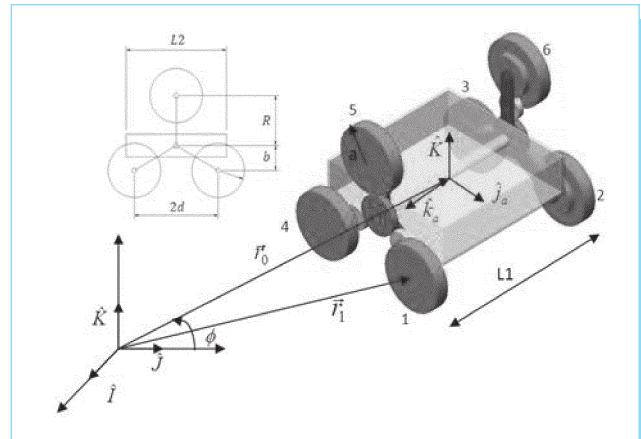


Fig. 2. Dispositivo de seis ruedas y sus vectores de posición.

1 y 2), que será adaptado a una silla para auxiliar en el ascenso y descenso de escaleras rectas, este dispositivo tiene los grados de libertad típicos de una silla de ruedas convencional en el movimiento en el plano.

Se ha analizado el sistema cinemático empleando las ecuaciones de Euler Lagrange con constricciones, para determinar las ecuaciones de movimiento del dispositivo de seis ruedas dentro de un sistema de referencia inercial, asimismo las restricciones no holonómicas implícitas en el movimiento en el plano, se han caracterizado con multiplicadores de Lagrange, que serán de gran utilidad para la futura formulación del control del sistema.

4. Modelo matemático

A. Velocidades lineales

El dispositivo consta de seis ruedas (figura 2), tres por banco y un eje que une ambos bancos de ruedas, una base rectangular a la que se une el eje. Cada banco de ruedas tiene un sistema de tracción independiente por lo que la velocidad angular de cada banco también es independiente. Un mecanismo engrana las tres ruedas de cada banco de modo que la velocidad angular entre ellas es la misma. Se requieren dos torcas para conducir el carro, la dirección será el resultado de una combinación de ambas [7]. Se han tomado en cuenta las siguientes consideraciones generales:

- El carro se coloca sobre un plano horizontal I, J en un sistema gravitacional.
- Se ha supuesto que la masa de los motores que impulsa las ruedas es parte del soporte estrella que une a las tres ruedas de cada banco.

- Para simplificar se supondrá que las ruedas y el plano son rígidos y que el contacto entre ellos es un punto.
- Se considera que las ruedas rotan pero sin deslizar sobre el plano [8].

Se ha tomado como referencia un sistema inercial \mathbf{I} , \mathbf{J} , \mathbf{K} y un sistema de referencia en movimiento anclado al carro \hat{k}_a , \hat{j}_a , \hat{k} (figura 2), los vectores de posición \hat{r}_i de cada rueda están dados por

$$\begin{aligned} \vec{r}_1 &= \vec{r}_0 + L_{01}\hat{k}_a - b\mathbf{K} + d\hat{j}_a \\ \vec{r}_4 &= \vec{r}_0 + L_{01}\hat{k}_a - b\mathbf{K} - d\hat{j}_a \\ \vec{r}_5 &= \vec{r}_0 + L_{01}\hat{k}_a + R\mathbf{K} \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_0 - L_{01}\hat{k}_a - b\mathbf{K} + d\hat{j}_a \\ \vec{r}_3 &= \vec{r}_0 - L_{01}\hat{k}_a - b\mathbf{K} - d\hat{j}_a \\ \vec{r}_6 &= \vec{r}_0 - L_{01}\hat{k}_a + R\mathbf{K} \end{aligned} \quad (1)$$

donde $L_{01} = \frac{L_1}{2}$

Derivando las ecuaciones 1 con respecto del tiempo se obtienen las velocidades lineales de cada rueda \vec{V}_i

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \vec{V}_0 + L_{01}\dot{\phi}\hat{j}_a - d\dot{\phi}\hat{k}_a \\ \vec{V}_4 &= \vec{V}_0 + L_{01}\dot{\phi}\hat{j}_a + d\dot{\phi}\hat{k}_a \\ \vec{V}_5 &= \vec{V}_0 + L_{01}\dot{\phi}\hat{j}_a \\ \vec{V}_2 &= \vec{V}_0 - L_{01}\dot{\phi}\hat{j}_a - d\dot{\phi}\hat{k}_a \\ \vec{V}_3 &= \vec{V}_0 - L_{01}\dot{\phi}\hat{j}_a + d\dot{\phi}\hat{k}_a \\ \vec{V}_6 &= \vec{V}_0 - L_{01}\dot{\phi}\hat{j}_a \end{aligned} \quad (2)$$

donde

$$\vec{V}_0 = \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \dot{x}\mathbf{I} + \dot{y}\mathbf{J} = \vec{r}_0 \quad (3)$$

B. Restricciones no holonómicas

Las ruedas en contacto con el piso ruedan sin deslizar, lo que significa que la velocidad en el punto de contacto rueda-piso es cero

$$\vec{V}_i + \vec{\omega}_i \times a\mathbf{K} = 0 \quad i = 1,2,3,4 \quad (4)$$

donde

\vec{V}_i son las velocidades lineales de las ruedas en contacto con el piso (ecuaciones 2),

ω_i son las velocidades angulares de las ruedas en contacto con el piso,
 a es el radio de las ruedas.

De manera general la velocidad angular usando los ángulos de Euler [12] se expresa de la forma

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \mathbf{I}(-\dot{\theta} \sin\phi + \dot{\psi} \sin\theta \cos\theta) + \\ &\quad \mathbf{J}(\dot{\theta} \cos\phi + \dot{\psi} \sin\theta \sin\phi) + \\ &\quad \mathbf{K}(\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta) \end{aligned} \quad (5)$$

Donde cada ángulo representa un grado de libertad en la rueda, según se aprecia en la figura 3.

Para el caso particular del dispositivo de seis ruedas se tienen los grados de libertad como sigue:

$$\begin{aligned} \theta_i &= 90^\circ, & \dot{\theta}_i &= 0 \\ \psi_i &= \Psi_i, & \dot{\Psi}_i &= \dot{\Psi}_1 \\ \phi_i &= \Phi_i, & \dot{\Phi}_i &= \dot{\Phi}_1 \end{aligned}$$

Por lo que sustituyendo estos valores en la ecuación 5, obtenemos las velocidades angulares en cada una de las ruedas:

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_1 &= \mathbf{I}(\dot{\psi}_1 \cos\phi) + \mathbf{J}(\dot{\psi}_1 \sin\phi) + \mathbf{K}\dot{\phi} \\ \vec{\omega}_2 &= \mathbf{I}(\dot{\psi}_2 \cos\phi) + \mathbf{J}(\dot{\psi}_2 \sin\phi) + \mathbf{K}\dot{\phi} \\ \vec{\omega}_3 &= \mathbf{I}(\dot{\psi}_2 \cos\phi) + \mathbf{J}(\dot{\psi}_2 \sin\phi) + \mathbf{K}\dot{\phi} \\ \vec{\omega}_4 &= \mathbf{I}(\dot{\psi}_1 \cos\phi) + \mathbf{J}(\dot{\psi}_1 \sin\phi) + \mathbf{K}\dot{\phi} \end{aligned} \quad (6)$$

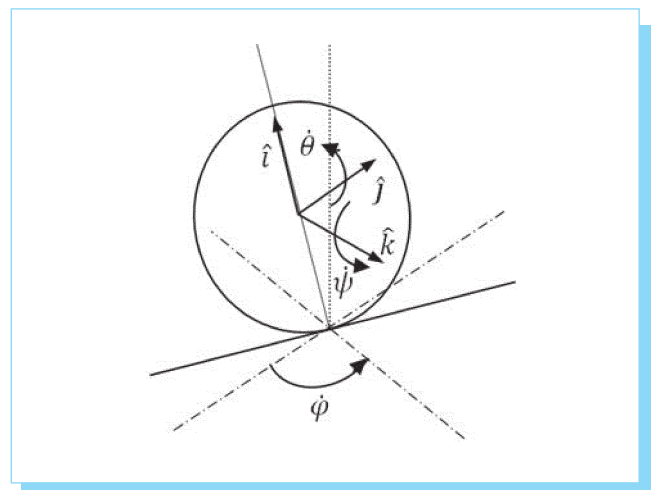


Fig. 3. Representación de los grados de libertad de una rueda.

De las ecuaciones 6 de velocidad angular se observa que $\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_4$ y que $\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_3$, dado que son las ruedas del lado del mismo banco.

Se define ahora el vector $\hat{a}k$ que es el vector que va del centro de la rueda al punto de contacto entre la rueda y el piso

$$\hat{a}k = a (\cos\theta \cos\varphi \mathbf{I} + \cos\theta \sin\varphi \mathbf{J} - \sin\theta \mathbf{K}) \quad (7)$$

para $\theta = 90^\circ$, $\hat{a}k = -\hat{k}a$

con lo que se puede obtener el producto vectorial $\hat{\omega}_i \times \hat{a}k$ requerido en la ecuación 4:

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{1,4} \times \hat{a}k &= \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \dot{\psi}_1 \cos\varphi & \dot{\psi}_1 \sin\varphi & \dot{\phi} \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{I}(-a\dot{\psi}_1 \sin\varphi) + \mathbf{J}(a\dot{\psi}_1 \cos\varphi) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{2,3} \times \hat{a}k &= \begin{vmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J} & \mathbf{K} \\ \dot{\psi}_2 \cos\varphi & \dot{\psi}_2 \sin\varphi & \dot{\phi} \\ 0 & 0 & -a \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{I}(-a\dot{\psi}_2 \sin\varphi) + \mathbf{J}(a\dot{\psi}_2 \cos\varphi) \end{aligned} \quad (9)$$

Sustituyendo los valores de \vec{V}_i de las ecuaciones 2 y el producto vectorial de las ecuaciones 8 y 9 en la ecuación 4, se obtienen las ecuaciones no holonómicas [9] de cada rueda que está en contacto con el piso

$$\begin{aligned} \dot{x} \sin\varphi - \dot{y} \cos\varphi - L_{01} \dot{\phi} - a\dot{\psi}_1 &= 0 \\ \dot{x} \sin\varphi - \dot{y} \cos\varphi - L_{01} \dot{\phi} - a\dot{\psi}_1 &= 0 \\ \dot{x} \sin\varphi - \dot{y} \cos\varphi + L_{01} \dot{\phi} - a\dot{\psi}_2 &= 0 \\ \dot{x} \sin\varphi - \dot{y} \cos\varphi + L_{01} \dot{\phi} - a\dot{\psi}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

para las ruedas 1, 4, 2 y 3 respectivamente.

C. Descripción de la dinámica

La dinámica se definirá a partir de la construcción del Lagrangiano que está dado por la energía cinética menos la energía potencial [10].

$$L = T - V \quad (11)$$

Para el caso de movimiento en el plano del dispositivo de seis ruedas, participarán todos los cuerpos rígidos con movi-

miento lineal o angular, los cuales contribuyen a la energía cinética del sistema, por lo que el lagrangiano quedará definido en términos de velocidades lineales, velocidades angulares y momentos de inercia respectivos.

$$\begin{aligned} L = & 1/2 m_{FR} v_0^2 + 1/2 I_{FR} \dot{\phi}^2 + 1/2 m_{ax} v_0^2 + \\ & 1/2 I_{ax} \dot{\phi}^2 + m_{wf} [x^2 + y^2 + L_0 \dot{\phi}^2 - 2L_0 \dot{\phi} X] + \\ & m_{wr} [x^2 + y^2 + L_0^2 \dot{\phi}^2 - 2L_0 \dot{\phi} X] + \\ & 1/2 I_{wf3} (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2) + 1/2 I_{wr3} (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2) + \\ & 1/2 I_{wa} (\dot{\psi}_1^2 + \dot{\psi}_2^2) + m_{sp} v_0^2 + I_{sp} \dot{\phi}^2 - V \end{aligned} \quad (12)$$

donde $X = \dot{x} \cos\varphi - \dot{y} \sin\varphi$

$$v_0^2 = \langle v_0, v_0 \rangle = \vec{v}_0 \cdot \vec{v}_0$$

$$L_0^2 = L_{01}^2 + d^2, \quad V = (m_s + m_0)gR = 2m_A gR$$

g : aceleración de la gravedad

I_{FR} : momento de inercia del cuadro al de \mathbf{K}

I_{ax} : momento de inercia del eje al de \mathbf{K}

I_{wi} : momento de inercia de las ruedas alrededor de sus diferentes ejes de giro i

I_{sp} : momento de inercia del soporte de estrella alrededor de \mathbf{K}

m_{FR} : masa del cuadro, m_{ax} : masa del eje

m_{wf} : masa de las ruedas frontales

m_{wr} : masa de las ruedas traseras

m_A : masa de las ruedas superiores

m_{sp} : masa del soporte de estrella

D. Multiplicadores de Lagrange

Los multiplicadores de Lagrange se definen en función de las variables cinemáticas (ecuación 13) que toman en cuenta todos los grados de libertad del sistema [11] y que están dadas por

$$\vec{q}_i = (x, y, \phi, \psi_1, \psi_2)^T \quad (13)$$

Una ecuación de movimiento se encontrará para cada variable cinemática a partir de las ecuaciones de Lagrange con constricciones, que en su forma general se describen como

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \Gamma_i^{apl} + \Gamma_i^{cte} \quad i = 1, 2, \dots, 9 \quad (14)$$

donde

Γ_i^{apl} son las fuerzas generalizadas

Γ_i^{cte} son las fuerzas de restricción

Derivando parcialmente las ecuaciones 10 de restricción no holonómicas con respecto a cada una de las \dot{q}_i (ecuación 13),

se obtienen las contribuciones de las fuerzas de restricción en términos de los correspondientes multiplicadores de Lagrange

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{cte} &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\text{sen}\varphi \\ \Gamma_2^{cte} &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)\text{cos}\varphi \\ \Gamma_3^{cte} &= -\lambda_1 L_{01} + \lambda_2 L_{01} + \lambda_3 L_{01} - \lambda_4 L_{01} \\ \Gamma_4^{cte} &= -(\lambda_1 + \lambda_4)a \\ \Gamma_5^{cte} &= -(\lambda_2 + \lambda_3)a\end{aligned}\quad (15)$$

Los Γ_i^{apl} de la ecuación 14 están definidos en función de los pares directos que se aplicarán al mecanismo de cada banco de ruedas, por lo tanto

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{apl} &= 0 \\ \Gamma_2^{apl} &= 0 \\ \Gamma_3^{apl} &= 0 \\ \Gamma_4^{apl} &= \Gamma_1 \\ \Gamma_5^{apl} &= \Gamma_2\end{aligned}\quad (16)$$

Después de las operaciones correspondientes se llega a

$$\begin{aligned}\lambda_{14} &= [\Gamma_1 - 3I_w \ddot{\psi}_1] a^{-1} \\ \lambda_{23} &= [\Gamma_2 - 3I_w \ddot{\psi}_1] a^{-1}\end{aligned}\quad (17)$$

donde

$$\begin{aligned}\lambda_{14} &= \lambda_1 + \lambda_4 \quad \text{y} \quad \lambda_{23} = \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_w &= I_{wf3} + I_{wr3} + I_{wa}\end{aligned}$$

Derivando con respecto del tiempo las ecuaciones 10 de restricción no holonómicas y despejando $\ddot{\psi}_i$, se obtienen

$$\begin{aligned}\ddot{\psi}_1 &= a^{-1} [\ddot{x} \text{sen}\varphi - \ddot{y} \text{cos}\varphi + \dot{\phi}(\dot{x} \text{cos}\varphi + \dot{y} \text{sen}\varphi) - L_{01} \ddot{\phi}] \\ \ddot{\psi}_2 &= a^{-1} [\ddot{x} \text{sen}\varphi - \ddot{y} \text{cos}\varphi + \dot{\phi}(\dot{x} \text{cos}\varphi + \dot{y} \text{sen}\varphi) - L_{01} \ddot{\phi}]\end{aligned}\quad (18)$$

Sustituyendo los valores de $\ddot{\psi}_1$ y $\ddot{\psi}_2$ (ecuaciones 18) en λ_{14} y λ_{23} (ecuaciones 17), se conocen los valores de Γ_i^{cte} , $i = 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned}\Gamma_1^{cte} &= a^{-1} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \text{sen}\varphi - I_w a^{-2} [2\ddot{x} \text{sen}^2\varphi - 2\ddot{y} \text{sen}\varphi \text{cos}\varphi \\ &\quad + 2\dot{\phi}(\dot{x} \text{sen}\varphi \text{cos}\varphi + \dot{y} \text{sen}^2\varphi)] \\ \Gamma_2^{cte} &= -a^{-1} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \text{cos}\varphi + I_w a^{-2} [2\ddot{x} \text{sen}\varphi \text{cos}\varphi - 2\ddot{y} \text{cos}^2\varphi \\ &\quad + 2\dot{\phi}(\dot{x} \text{cos}^2\varphi + \dot{y} \text{sen}\varphi \text{cos}\varphi)] \\ \Gamma_3^{cte} &= a^{-1} (\Gamma_2 - \Gamma_1) L_{01} - 2I_w a^{-2} L_{01}^2 \varphi\end{aligned}\quad (19)$$

E. Ecuaciones de movimiento

Se pueden expresar de forma matricial las ecuaciones de movimiento para $j = 1, 2, 3$, que son las variables cinemáticas que definen todos los movimientos [13], la forma matricial reducida de las ecuaciones de movimiento es como sigue

$$\tilde{M}\ddot{x} + \hat{h} = \tilde{\tau} \quad (20)$$

donde cada término en su forma explícita vendrá expresada como

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \tau_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

donde

$$\begin{aligned}m_{11} &= m_0 + 2I_w a^{-2} \text{sen}^2\varphi \\ m_{12} &= -2I_w a^{-2} \text{sen}\varphi \text{cos}\varphi \\ m_{13} &= -L_0 \text{cos}\varphi (m_{wr} - m_{wf}) \\ m_{21} &= -2I_w a^{-2} \text{sen}\varphi \text{cos}\varphi \\ m_{22} &= m_0 + 2I_w a^{-2} \text{cos}^2\varphi \\ m_{23} &= 2L_0 \text{sen}\varphi (m_{wr} - m_{wf}) \\ m_{31} &= -L_0 \text{cos}\varphi (m_{wr} - m_{wf}) \\ m_{32} &= 2L_0 \text{sen}\varphi (m_{wr} - m_{wf}) \\ m_{33} &= L_{FR} + I_{ax} + 2I_{sp} + 2L_0^2 (m_{wr} + m_{wf}) + 2I_w a^{-2} L_{01}^2 \\ h_1 &= 2L_0 \dot{\phi}^2 \text{sen}\varphi (m_{wf} - m_{wr}) \\ &\quad + 2I_w a^{-2} \varphi (x \text{sen}\varphi \text{cos}\varphi + y \text{sen}^2\varphi) \\ h_2 &= 2L_0 \dot{\phi}^2 \text{cos}\varphi (m_{wr} - m_{wf}) \\ &\quad - 2I_w a^{-2} \varphi (x \text{cos}^2\varphi + y \text{sen}\varphi \text{cos}\varphi) \\ h_3 &= 0 \\ \tau_1 &= a^{-1} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \text{sen}\varphi \\ \tau_2 &= -a^{-1} (\Gamma_1 + \Gamma_2) \text{cos}\varphi \\ \tau_3 &= a^{-1} (\Gamma_2 - \Gamma_1) L_{01}\end{aligned}$$

donde

$$m_0 = m_{FR} + m_{ax} + 2m_{wf} + 2m_{wr} + 2m_A + 2m_{sp}$$

La ecuación 21 resume las ecuaciones de movimiento que describen la cinemática y dinámica del dispositivo de seis ruedas en el movimiento en el plano.

F. Ejemplos numéricos

Los ejemplos numéricos demuestran el comportamiento cinemático del sistema a partir de las ecuaciones de movimiento, se han designado los siguientes valores estimados:

$$\begin{aligned}
 m_{FR} &= 60 \text{ kg} \\
 m_{ca} &= 5 \text{ kg} \\
 m_{wf} &= 2 \text{ kg} \\
 m_{wr} &= 2 \text{ kg} \\
 m_A &= 2 \text{ kg} \\
 m_{sp} &= 10 \text{ kg} \\
 I_{FR} &= 2.56 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\
 I_{ca} &= 0.214 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\
 I_w &= 7.9 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\
 I_{sp} &= 0.0756 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \\
 a &= 0.2 \text{ m} \\
 L_0 &= 0.3182 \text{ m} \\
 m_0 &= 97 \text{ kg} \\
 \varphi &= 0.35 \text{ rad} \\
 \dot{x} &= 0.85 \text{ m/s} \\
 \dot{y} &= 0.55 \text{ m/s} \\
 \dot{\varphi} &= 6 \text{ rad/s} \\
 \ddot{x} &= 0.20 \text{ m/s}^2 \\
 \ddot{y} &= 0.40 \text{ m/s}^2 \\
 \ddot{\varphi} &= 0.10 \text{ rad/s}^2
 \end{aligned}$$

Las torcas resultantes son:

$$\begin{aligned}
 \tau_1 &= 20.1669 \text{ N}\cdot\text{m} \\
 \tau_2 &= 36.5120 \text{ N}\cdot\text{m} \\
 \tau_3 &= 0.3755 \text{ N}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

Dado que el sistema de ecuaciones 21 es un sistema no lineal y sobredeterminado, tenemos tres ecuaciones y dos incógnitas, por lo que podemos escoger combinaciones entre τ_1 , τ_2 y τ_3 para obtener las torcas aplicadas.

Tomando τ_2 y τ_3 obtenemos

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= -4.0537 \text{ N}\cdot\text{m} \\
 \Gamma_2 &= 4.3875 \text{ N}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

Tomando τ_1 y τ_3 obtenemos

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= 5.7122 \text{ N}\cdot\text{m} \\
 \Gamma_2 &= 6.0438 \text{ N}\cdot\text{m}
 \end{aligned}$$

De los resultados obtenidos concluimos que el sistema dinámico es no lineal y que para producir aceleraciones de $\ddot{x} = 0.20 \text{ m/s}^2$, $\ddot{y} = 0.40 \text{ m/s}^2$ y $\ddot{\varphi} = 0.10 \text{ rad/s}^2$, no hay un valor de torque único que se deba aplicar a las ruedas.

Se consideraron cinco casos más haciendo combinaciones con las aceleraciones lineales y angular para verificar el sistema de ecuaciones 21 obtenido en este análisis, las combinaciones de los valores asignados a las aceleraciones \ddot{x} , \ddot{y} y $\ddot{\varphi}$ así como las torcas combinadas τ_i y aplicadas Γ_i resultantes se resumen en la tabla 1. En todos los casos se tomaron las torcas τ_2 y τ_3 , para determinar Γ_1 y Γ_2 .

Tabla 1. Combinaciones de valores asignados a las aceleraciones y las respectivas torcas obtenidas.

CASO	1	2	3	4	5
d^2x/dt	0.2	0.2	0	0.2	0
d^2y/dt	0.4	0	0.2	0.2	0
$d^2\varphi/dt$	0.1	0	0	0	0.1
τ_1	20.1669	20.2178	0.7827	20.1923	0.8081
τ_2	36.512	-2.4444	17.0591	17.0336	-2.4192
τ_3	0.3755	0	0	0	0.3755
Γ_1	-4.0537	0.2601	-1.816	-1.813	0.0906
Γ_2	4.3875	0.2601	-1.816	-1.813	0.4244

Las gráficas de las figuras 4, 5 y 6 representan los valores de la tabla 1, la figura 4 corresponde a las torcas y las figuras 5 y 6 a las aceleraciones.

De los resultados se verifica que en el caso 1 se propone un valor determinado tanto en aceleración lineal como angular, el resultado es torcas de valores próximos en magnitud pero de signo contrario, en los casos 2 y 3 donde se determina que sólo habrá aceleración lineal en uno de los ejes, resulta una torca aplicada del mismo valor en cada banco de ruedas lo cual es totalmente lógico, de aquí se comprueba la consistencia del sistema de ecuaciones desarrollado, de igual modo en el caso 4 cuando se propone que sólo se tendrá aceleración lineal pero de la misma magnitud en ambos ejes coordinados, resulta una torca aplicada idéntica, lo cual significa que el vehículo se moverá en línea recta. Finalmente en el caso 5

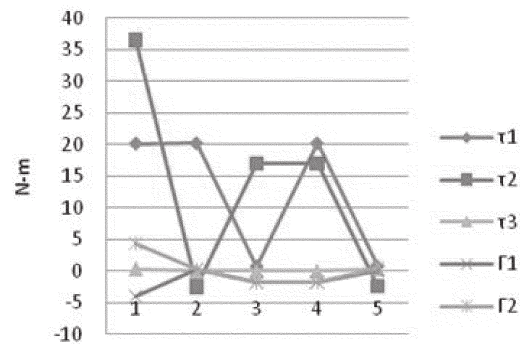


Fig. 4. Torcas combinadas y aplicadas.

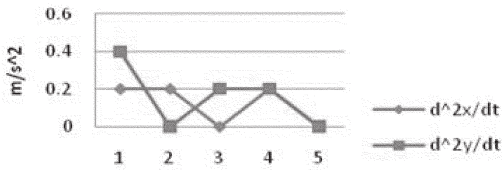


Fig. 5. Aceleración lineal.

donde se propone que la aceleración lineal sea cero y que la angular tenga un valor de 0.1 rad/s^2 , se verifica que una de las torcas tendrá que ser notablemente mayor, tal y como sucede en los diferenciales de los vehículos automotor, donde las ruedas cercanas al eje de giro requieren disminuir el torque para facilitar el giro.

5. Perspectiva y conclusiones

Las ecuaciones de movimiento que se desarrollaron describen el comportamiento dinámico del dispositivo de seis ruedas en un plano bidimensional I, J , estas ecuaciones son una variante de la segunda ley de Newton; en la primera matriz aparecen todos los términos propios de los cuerpos que forman parte del sistema, como son las masas, los momentos de inercia y las variables geométricas por la disposición entre ellos, en la matriz de las aceleraciones aparecen aquellas que definen los grados de libertad del sistema, la matriz de las h_i representa el impulso o cantidad de movimiento que para la variable cinemática ϕ es cero, del lado derecho de la ecuación aparecen las torcas τ_i que dependen directamente de las torcas aplicadas por los motores que impulsan a cada banco de ruedas, se demuestra que la di-

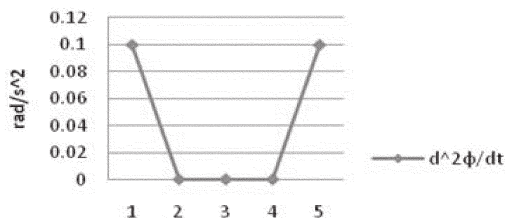


Fig. 6. Aceleración angular.

rección del carro estará supeditada a la combinación de estos valores de torca.

La aplicación más inmediata de las ecuaciones de movimiento obtenidas, es la simulación del movimiento del carro [14] utilizando algún software como Matlab, esto permitirá parametrizar los valores que deberán adoptar las variables cinemáticas así como las dimensiones generales del dispositivo para evaluar las diferentes trayectorias al desplazarse en el plano horizontal.

Un algoritmo de control puede ser implementado partiendo de las ecuaciones de movimiento y una ley de control que se defina a conveniencia de la operación del sistema dinámico [15], considerando que la estabilidad del dispositivo sólo abarca una parte del problema, ya que también se tendrán que tomar en cuenta las características físicas y antropométricas del usuario cuando sea integrada la silla.

6. Referencias

- [1] Centro de Cirugía Especial de México CCEM (2006), Discapacidad en México, cifras y costos de la discapacidad. Recuperado el 29 abril 2010 en <http://www.ccem.org.mx/costos.htm>
- [2] T. R. Fernández, *Traumatismos de la columna vertebral y pelvis, fracturas y luxaciones: clínica, clasificación y tratamiento, uso de la resonancia magnética*. Tratamiento Tomo II, cap.9, Lima, Perú, 2000, pp. 99-101.
- [3] L.H. Hernández-Gómez, J.A. Beltrán-Fernández, G. Urriolagoitia-Calderón, A. González-Rebatú, M. M. Galán Vera y G. Urriolagoitia Sosa, "Biomechanical Characterization of a Cervical Corpectomy using Porcine Specimens, following an Experimental Approach", *Key Engineering Materials*, vol. 478 (2011), pp. 103-111.
- [4] R. A. Cooperab, R. Cooperab y M. L. Boningerab, "Assistive Technology: Trends and Issues in Wheelchair Technologies"; *the Official Journal of RESNA*, vol. 20, núm. 2, junio, 2008, pp. 61-72.
- [5] "iBOT Mobility System owners", published by Independence Technology, L.L.C. 2001-2009. Recuperado el 13 enero 2010 en <http://www.ibotnow.com/>
- [6] D. Ding, R. A. Cooper, "Electric-Powered Wheelchairs, A review of current technology and insight into future directions", *IEEE Control Systems Magazine*, abril, 2005, pp. 22-34.
- [7] C. Huang, "Derivation of the 2-D Model of Walker Dynamics with 3-D Forces and Moments Measured at the Handles", *Mechanical and Aerospace engineering School of Engineering and Applied Science, University of Virginia*, febrero, 2004, pp. 1-30.

- [8] E. T. Whittaker, *A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies*, Cambridge University Press, 1917, pp. 1-22.
- [9] G. D. White, R. M. Bhatt y V. N. Krovi, "Dynamic redundancy resolution in a non holonomic wheeled mobile manipulator", *Journal Robotica*, vol. 25, núm. 2, marzo, 2007, pp. 147-156.
- [10] H. Goldstein, *Mecánica clásica*, 2ª ed., versión española por J. Fernández Ferrer, Reverté, 1990, pp. 1-30.
- [11] A. M. Bloch, N. E. Leonard y J. E. Marsden, "Stabilization of the Pendulum on a rotor arm by the method of controlled lagrangians", *International Conference on Robotics and Automation*, IEEE, Piscataway, NJ, mayo, 1999, pp. 500-505.
- [12] W. Hauser, traducción por C. Ordoñez, *Introducción a los principios de mecánica*, México: UTEHA, 1969, pp. 65-82, 314-345.
- [13] R. Van Zon y J. Schofield, "Numerical implementation of the exact dynamics of free rigid bodies", *Journal of Computational Physics*, vol. 225, 2007, pp. 145-164.
- [14] D. V. Zenkov, A. M. Bloch y J. E. Marsden, "The Lyapunov-Malkin theorem and stabilization of the unicycle with rider", *Systems and Control Letters*, vol. 45, 2002, pp. 293-302.
- [15] K. A. Tahboud y H. H. Asada, "Dynamics analysis and control of a holonomic vehicle with a continuously variable transmission", *Transactions of the ASME*, vol. 124, marzo, 2002, pp. 118-126.

Periódica

Índice de Revistas Latinoamericanas en Ciencias

<http://www.dgbiblio.unam.mx/>

http://132.248.9.1:8991/F/-/?func=find-b-0&local_base=PER01