

Evaluación del procedimiento adaptivo de reconstrucción de dos procesos no markovianos con esperanza matemática desconocida

V. A. Kazakov
J. A. Medina

Departamento de Telecomunicaciones,
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica Zacatenco,
Instituto Politécnico Nacional.
Unidad Profesional 'Adolfo López Mateos', Col. Lindavista,
CP 07738, México DF.
MÉXICO.

Tel. (+52) 55 5729 6000 ext. 54757
Correo electrónico vkazakov41@hotmail.com
amedinah0600@ipn.mx

Recibido el 13 de octubre de 2009; aceptado el 26 de febrero de 2010.

1. Resumen

En el presente trabajo se analiza un algoritmo adaptivo para la estimación de la esperanza matemática en tiempo real durante el procedimiento de muestreo. Se estudia el impacto de esta estimación en la calidad de la reconstrucción. Se analizan dos tipos de procesos gaussianos no markovianos obtenidos a la salida de los circuitos RC de dos y tres etapas alimentados por ruido blanco. Se proponen los parámetros necesarios para aplicar la metodología en un sistema de comunicaciones de tiempo real. La metodología empleada se basa en la regla de la esperanza matemática condicional y en principios de estadística.

Palabras clave: adaptivo, muestreo reconstrucción, no markoviano.

2. Abstract (Adaptive Estimation of the Sample Mean in Real Time)

The present work provides a study of the adaptive estimation of the sample mean in real time. The impact of the estimation

over the reconstruction quality is analyzed. Both second and third order processes are studied. The necessary parameters to apply the proposed methodology in a real time communication system are given. The proposed methodology is based on the conditional mathematical expectation rule and statistical principles.

Key words: adaptive, sampling-reconstruction, non markovian.

3. Introducción

Dentro del campo de las comunicaciones, el procedimiento de muestreo reconstrucción (PMR) tiene un interés especial y existen diversos autores que enfocan sus trabajos en esta área de investigación (véase, por ejemplo [1-2]). Sin embargo, en la mayoría de los artículos dedicados a la solución de este problema no se toman en cuenta algunas de las características estadísticas más importantes que definen el comportamiento de un proceso muestreado como: función de densidad de probabilidad (fdp), esperanza matemática, función de covarianza, y la varianza incondicional. Es claro que no es lo mismo reconstruir una señal determinística que una señal aleatoria. La metodología empleada se basa en la regla de la esperanza matemática condicional. Esta regla ha sido aplicada ampliamente en la descripción del PMR de diversos procesos estacionarios, no estacionarios, gaussianos, no gaussianos, con y sin jitter. Sin embargo, en el empleo de esta metodología se establece que los parámetros de cada proceso dado son conocidos de manera previa. Esta situación representa un problema serio en la aplicación de la metodología en los sistemas de comunicaciones de tiempo real. En este sentido, el principal objetivo es desarrollar un algoritmo que sea capaz de estimar aquellos parámetros fundamentales para la descripción del proceso. En el presente trabajo se analiza el caso donde únicamente la esperanza matemática del proceso es desconocida y su estimación se realiza en tiempo real. La introducción de esta estimación al procedimiento de reconstrucción se realiza de manera adaptiva con respecto a los valores muestrales obtenidos en la entrada del sistema.

4. Desarrollo

4. Regla de la esperanza matemática condicional

La regla de la media condicional asegura la evaluación de la variable aleatoria con el error mínimo. Siguiendo esta regla, es posible utilizar la función de la media condicional [3]:

$$\tilde{m}(t) = [x(t)|X, T] \quad (1)$$

como la función de reconstrucción. Donde X, T es la multitud de los muestreos, y el paréntesis angular significa el promedio estadístico de la función.

La expresión para la varianza condicional se encuentra dada por la siguiente fórmula:

$$\tilde{\sigma}^2(t) = [x^2(t)|X, T] \quad (2)$$

que caracteriza la función de error mínimo de reconstrucción. Las características principales del PMR (1) y (2) pueden ser calculadas de manera fácil para los procesos gaussianos. Podemos considerar el caso general de un proceso gaussiano estacionario x con la esperanza matemática m , la varianza σ^2 y la función de covarianza $K(\tau)$. Ésta es la información completa acerca del proceso dado. De aquí se puede escribir la expresión exacta de la función de densidad de probabilidad multidimensional de orden m arbitraria:

$$w_m[x(t_1), K x(t_m)] = (2\pi)^{m/2} [\det K(t_i, t_j)]^{1/2} \times \exp\left\{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [x(t_i) - m(t_i)] a_{ij} [x(t_j) - m(t_j)]\right\} \quad (3)$$

donde $\det K(t_i, t_j)$ es la determinante de la matriz de covarianza:

$$K(t_i, t_j) = \begin{bmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) & \dots & K(t_1, t_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(t_m, t_1) & K(t_m, t_2) & \dots & K(t_m, t_m) \end{bmatrix} \quad (4)$$

y a_{ij} son los elementos de la matriz inversa de covarianza. Si fijamos un conjunto de muestras $X, T = \{x(T_1), x(T_2), \dots, x(T_N)\}$ entonces la fdp condicional será también gaussiana y las principales características estadísticas de este proceso condicional están dadas por las expresiones (5) y (6), donde el proceso gaussiano condicional $x(t)$ está descrito [3]:

$$m(t) = m + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} [x(T_j) - m(T_j)] \quad (5)$$

$$\tilde{\sigma}^2(t) = \sigma^2 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N K(t, T_i) a_{ij} K(T_j, t) \quad (6)$$

Donde m y σ^2 son respectivamente, la media y la varianza del proceso inicial $x(t)$. La metodología empleada ha sido aplicada en múltiples escenarios de la investigación del procedimiento de muestreo reconstrucción, por ejemplo [4-6] entre otros, donde se demuestra que la regla de la esperanza matemática condicional es una herramienta útil, práctica y de fácil aplicación. Algunas de las principales ventajas que esta metodología nos ofrece son: 1) Es posible considerar un número finito de muestras; 2) Toma en cuenta la información estadística del proceso, proporcionando así un error de reconstrucción mínimo; 3) Es posible extender la metodología al caso no estacionario; 4) Es posible analizar de manera fácil el proceso en presencia de jitter, etcétera.

4.2. PMR de los procesos no markovianos en condiciones ideales

En esta sección se analizarán brevemente dos procesos no markovianos obtenidos a la salida de dos circuitos RC de segundo y tercer orden suponiendo condiciones ideales. Es decir, los parámetros estadísticos que definen el comportamiento del proceso se conocen previamente. Las funciones de covarianza de estos procesos de dos y tres etapas se muestran en (7) y (8) respectivamente.

$$R(\tau) = \frac{K(\tau)}{\sigma^2} = [1 + \alpha|\tau|] \exp(-\alpha|\tau|) \quad (7)$$

$$R(\tau) = \frac{K(\tau)}{\sigma^2} = [1 + \alpha|\tau| + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3}] \exp(-\alpha|\tau|) \quad (8)$$

Donde $\alpha=1/RC$. Con el propósito de hacer comparaciones más eficientes, las funciones de covarianza se han normalizado para obtener un tiempo de covarianza $\tau_c=1$. Bajo estas condiciones, el valor de alfa para el caso de dos etapas es $\alpha=2$, y para tres etapas es $\alpha=8/3$.

Dado que el objetivo principal de este trabajo no es analizar el PMR en condiciones ideales, sólo se presentará la función de error de reconstrucción para estos procesos. El análisis del error de reconstrucción nos dará un punto de comparación más preciso al analizar el error introducido por el desconocimiento de la esperanza matemática y su cálculo en tiempo real. En el cálculo del error de reconstrucción se emplea (6) y la introducción de las funciones de covarianza dadas por (7) y (8). En el presente ejemplo se asume que la varianza incondicional del proceso $\sigma^2=1$ y la esperanza matemática $m=0$.

En la Fig. 1 y Fig. 2 se observan las curvas calculadas para los procesos no markovianos obtenidos a la salida de dos circuitos RC de dos y tres etapas correspondientemente. De-

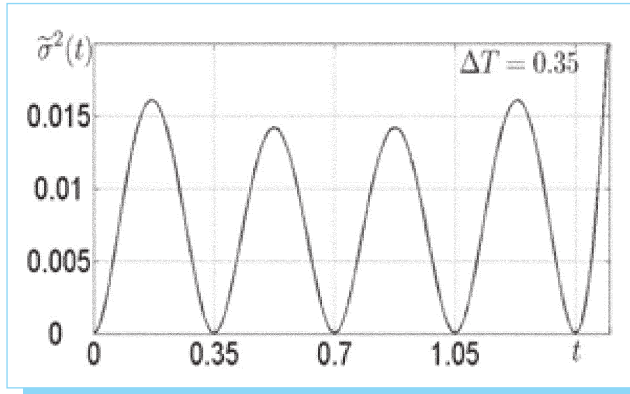


Fig. 1. Función de error de reconstrucción para un proceso a la salida de un circuito RC de dos etapas.

bido a que los procesos en estudio son procesos no markovianos, es natural observar en ambas figuras que el error de reconstrucción en el intervalo central es menor que en los extremos. En el caso del proceso de tres etapas de la Fig. 2, se observa que el error es menor en comparación con el error de la Fig. 1 que corresponde al filtro RC de dos etapas. Esta diferencia de errores se debe a que el proceso a la salida del circuito RC de tres etapas es más suave que el proceso a la salida del circuito de dos etapas, es decir, es menos caótico y por lo tanto la incertidumbre en la reconstrucción es menor también.

4.3. Descripción del algoritmo adaptivo de reconstrucción

En este caso de estudio, suponemos que todos los parámetros estadísticos que definen al proceso son conocidos con excep-

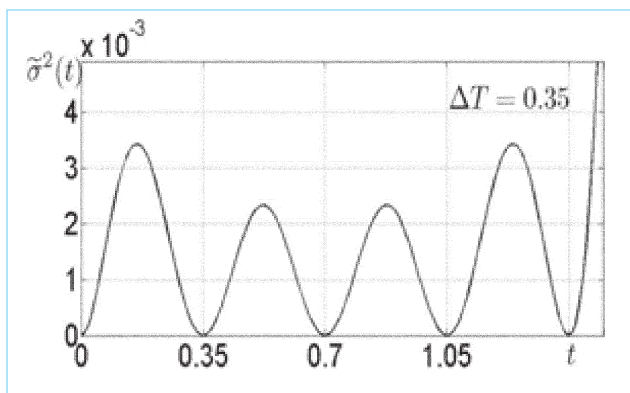


Fig. 2. Función de error de reconstrucción para un proceso a la salida de un circuito RC de tres etapas.

ción de la esperanza matemática. En este sentido, es necesario realizar una evaluación de la esperanza matemática. Supóngase que X_1, X_2, \dots, X_n son los valores de las muestras con igual distribución de probabilidad, entonces su esperanza matemática estará dada por la siguiente ecuación:

$$\hat{m} = \bar{X}(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (9)$$

La ecuación (9) nos permite calcular la esperanza matemática después de n muestras. Sin embargo, de la ecuación (5), observamos que existen dos parámetros desconocidos: $m(t)$ que es la esperanza matemática en todo el eje del tiempo; y $m(T_j)$ que es la esperanza matemática en los instantes de muestreo. El cálculo de la esperanza matemática en los instantes de muestreo $m(T_j)$ se realiza mediante el empleo del siguiente principio estadístico [7]:

$$\begin{aligned} \hat{m}(T_j) &= \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j x(T_i) \\ \hat{m}(T_j) &= \hat{m}(T_{j-1}) + \frac{x(T_j) - \hat{m}(T_{j-1})}{j} \end{aligned} \quad (10)$$

La ecuación (10) nos permite calcular la esperanza matemática en cada instante de muestreo $m(T_j)$ con la ventaja de no tener que realizar el procedimiento repetidamente desde $j=1$ (esta medida reduce tiempo de procesamiento y requerimientos de memoria). La estimación de la esperanza matemática en todo el eje del tiempo $m(t)$ se realiza mediante una operación de interpolación entre dos momentos $m(T_{j-1})$ y $m(T_j)$. En la Fig. 3 se presenta la simulación de una posible realización a la salida de los circuitos RC de dos y tres etapas.

Los procesos obtenidos a la salida de los circuitos RC de segundo y tercer orden, son obtenidos de la misma simula-

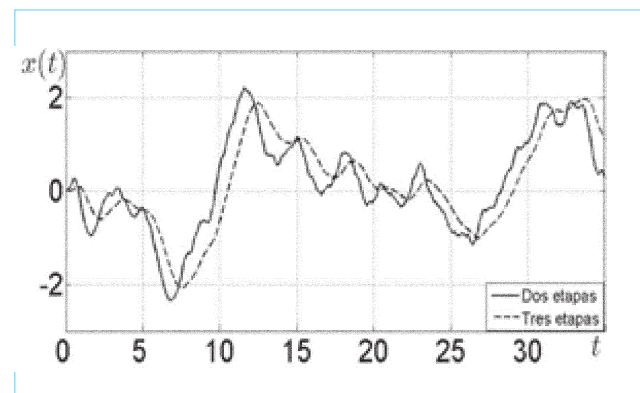


Fig. 3. Dos posibles realizaciones a la salida de dos circuitos RC de dos y tres etapas alimentados por ruido blanco.

ción de ruido. Es fácil observar el comportamiento similar entre ambas realizaciones. Sin embargo, existe un ligero retraso de tiempo debido a la etapa adicional para generar el circuito de tercer orden.

Para realizar la reconstrucción del proceso es necesario emplear (5). No obstante en este caso no conocemos el valor de la esperanza matemática por lo que no es posible aplicar (5) de forma directa. Es necesario calcular la esperanza matemática del proceso a medida que las muestras son obtenidas en el sistema en tiempo real. Para ello es necesario hacer uso de (10) y actualizar los resultados en el algoritmo adaptivo de la reconstrucción. Es claro que la aproximación de la esperanza matemática alcanza su nivel más preciso cuando el número de muestras evaluadas es suficientemente grande. Esto es:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \hat{m}(T_j) = m \quad (11)$$

Naturalmente, cuando consideramos sólo una pequeña cantidad de muestras, la esperanza matemática obtenida es un tanto lejana al valor de la esperanza matemática real. Por tal motivo, un error debido al cálculo de la esperanza matemática es introducido al procedimiento de reconstrucción y por tanto en la calidad de reconstrucción. El análisis de este error se presenta en la siguiente sección.

En el presente ejemplo consideramos un intervalo de muestreo $\Delta T=0.35$ y suponemos que los parámetros que describen estadísticamente al proceso son conocidos con excepción de la esperanza matemática.

El cálculo de las esperanzas de cada proceso muestra a muestra se presentan en la Fig. 4 y naturalmente también poseen un comportamiento similar. Se observa que ambas estimaciones tienden a estabilizarse aproximadamente en el mismo tiempo. En este ejemplo se observa un tiempo aproximado de $t=15$ que equivale aproximadamente a 40 muestras para que la estimación tienda a estabilizarse.

De ser posible, en aplicaciones prácticas es recomendable esperar este pequeño tiempo de transición para obtener resultados más favorables en la estimación de la esperanza matemática. Sin embargo en la siguiente sección se evalúa el impacto sobre la calidad de reconstrucción y se observa que el error introducido debido a la evaluación de la esperanza matemática no influye en gran manera a la reconstrucción del proceso.

La reconstrucción del proceso muestreado se realiza de manera adaptiva al introducir el cálculo de la esperanza matemática en (5). La reconstrucción del proceso a la salida del circuito RC de segundo orden se muestra en la Fig. 5. En esta figura

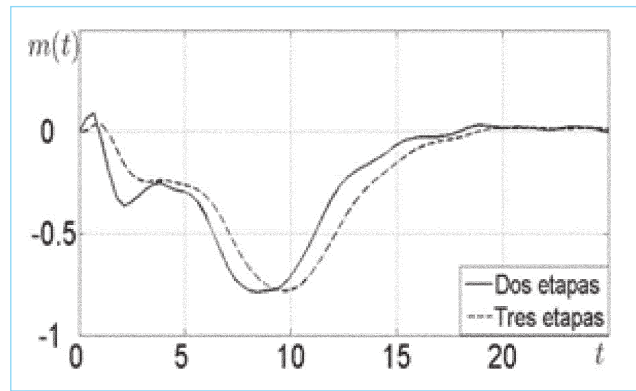


Fig. 4. Esperanza matemática para dos realizaciones a la salida de dos circuitos RC de dos y tres etapas alimentadas por ruido blanco.

se refiere a la reconstrucción del proceso como $\hat{y}(t)$. En la figura Fig. 6 se muestra el proceso reconstruido a la salida de un circuito RC de tres etapas $\hat{z}(t)$. En ambas figuras se presentan tanto las reconstrucciones en condiciones ideales (todos los parámetros estadísticos conocidos) como la reconstrucción adaptiva en cuanto a esperanza matemática. En ambas figuras se observa al inicio de la reconstrucción una diferencia considerable entre reconstrucciones ideales y adaptivas. Este error se debe al desconocimiento previo de la esperanza matemática y a la baja cantidad de muestras evaluadas para estimar la esperanza matemática.

4.4. Error de estimación de la esperanza matemática

La evaluación del error en la estimación de la esperanza matemática E_m se realizara de manera sencilla. En este caso

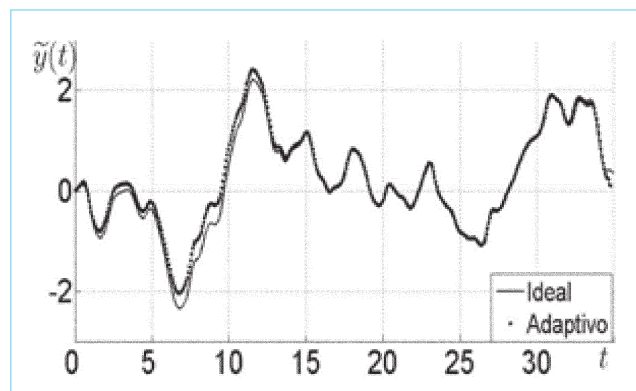


Fig. 5. Reconstrucción de un proceso no markoviano obtenido a la salida de un circuito RC de dos etapas.

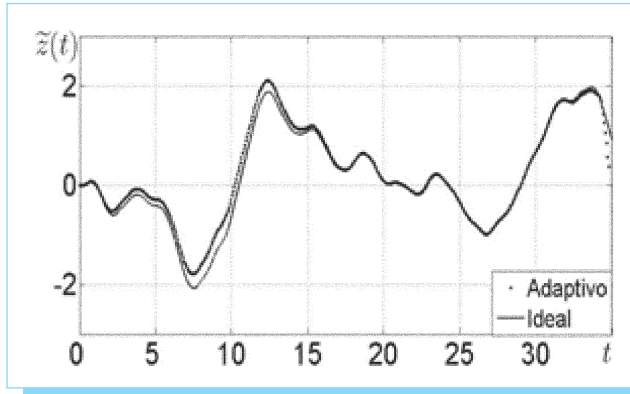


Fig. 6. Reconstrucción de un proceso no markoviano obtenido a la salida de un circuito RC de tres etapas.

consideraremos el error cuadrático medio (ECM) definido como [7]:

$$E_m(t_j) = \sum_{i=1}^j \frac{[m(T_i)] - m(T_j)]^2}{j(j-1)} \quad (12)$$

La ecuación (12) realiza la estimación del error cuadrático medio en el cálculo de la esperanza matemática para los instantes de muestreo $t_j, j=1, 2, \dots, n$. Mediante (12) es posible observar un error más grande al inicio de la evaluación. Es decir, cuando contamos con pocas muestras para la estimación el valor obtenido de la esperanza matemática dista notablemente del valor real que se obtiene al evaluar un número considerablemente grande de muestras (véase por ejemplo Fig. 4 donde la esperanza matemática sólo se estabiliza al final del intervalo). De la misma manera, es posible observar en las Fig. 5 y 6 los mismos efectos. Al inicio del procedimiento de reconstrucción el valor

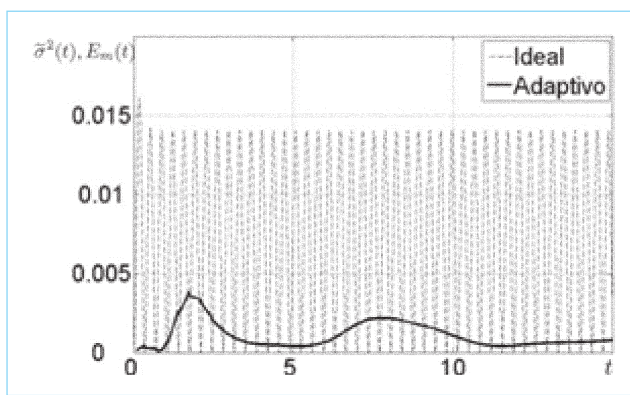


Fig. 7. Varianza condicional y ECM de la esperanza matemática del proceso obtenido a la salida de un circuito RC de segundo orden.

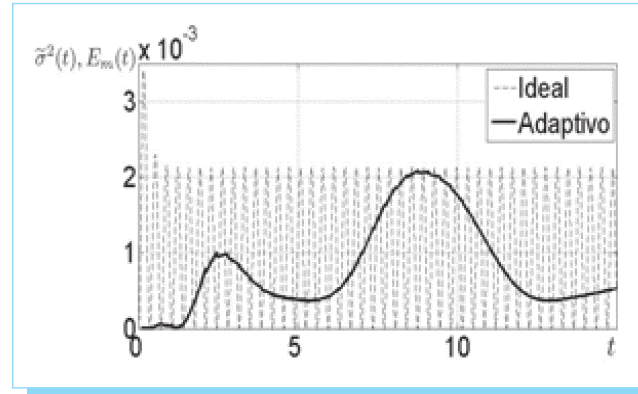


Fig. 8. Varianza condicional y ECM de la esperanza matemática del proceso obtenido a la salida de un circuito RC de segundo orden.

estimado de la esperanza matemática ocasiona algunos errores perceptibles a simple vista. Cuando el procedimiento de reconstrucción ha tomado suficientes muestras para aproximar eficazmente el valor de la esperanza matemática la reconstrucción obtenida mediante el procedimiento adaptivo se aproxima a la reconstrucción obtenida bajo condiciones ideales. Es importante notar en este punto, que algunos experimentos realizados para el caso markoviano arrojaron resultados singulares. En el caso markoviano el error introducido debido al desconocimiento de la esperanza matemática es prácticamente imperceptible. Este hecho puede explicarse de la siguiente manera. En comparación con un proceso markoviano, los procesos no Markovianos tienen una dependencia estadística mayor entre muestras, esta dependencia ocasiona que los errores de cálculo en la esperanza matemática en las muestras influyan de manera sustancial sobre muestras aledañas.

La varianza condicional dada por (6) y el ECM de la esperanza matemática se muestran en las Fig. 7 y 8 para ambos procesos no markovianos. Observamos en estas figuras que los errores debidos a la esperanza matemática son prácticamente idénticos. En las figs. 5 y 6 se observa cualitativamente este hecho. En la Fig. 8 el pico máximo del ECM de la esperanza matemática corresponde al máximo de la varianza condicional. Esto no significa que la reconstrucción con el método adaptivo sea de muy mala calidad. Es de notar que la metodología propuesta ofrece una reconstrucción con un mínimo de error. Prueba de esto, es la escala a la que el error está graficado para el caso del filtro RC de tres etapas.

5. Conclusiones

La regla de la esperanza matemática condicional ha sido válida y útil para analizar ampliamente procesos aleatorios

en una gran variedad de escenarios, sin embargo, esta metodología supone parámetros estadísticos ideales que complican la aplicación práctica de la metodología en sistemas de tiempo real. En este trabajo se mostró que mediante principios de estadística y un método adaptivo sencillo, la metodología propuesta continua siendo útil y práctica en la reconstrucción de procesos aleatorios. Con base en trabajos previos [4-6] y los resultados presentados, es posible decir que se esperan resultados favorables en la aplicación de la regla de la esperanza matemática condicional para sistemas de comunicación en tiempo real y otras aplicaciones prácticas.

6. Referencias

- [1] Elias Masry, "Random Sampling of Deterministic Signals: Statistical Analysis of Fourier Transform Estimates", *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, Vol. 54, No. 5, pp. 1750-1761.
- [2] B. Lacaze, "A Theoretical Exposition of Stationary Processes Sampling", *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, 2005, Vol.4, No. 5, pp. 201-230.
- [3] R.L. Stratonovich, *Topics in the theory of Random Noise*, Vol. 1, New York: Gordon and Breach, 1963.
- [4] V. A. Kazakov, M. A. Belyaev, "Sampling Reconstruction Procedure for Non-Stationary Gaussian Processes Base on Conditional Expectation Rule", *Sampling Theory in signal and image processing*, Vol. 1, pp. 135-153, 2002.
- [5] V. Kazakov, S. Sánchez, "Sampling Reconstruction Procedure of Random Processes at the Output of exponential non-linear converters", *Electromagnetic Waves, and Electronic Systems*, 2003, Vol. 8, No. 7, pp. 98-115.
- [6] V. Kazakov, A. Medina, "Interpolation Procedure with Jitter of Gaussian Process at the Output of the Time Varying System", 9th WSEAS International Conference on Automation and Information (ICAI 08), Bucharest, Romania, June 24-26, 2008. pp. 115-119.
- [7] Ross Sheldon, *Simulación*, Prentice Hall, 2ª ed., 1999.

Sistema de Información Científica Redalyc

Red de Revistas Científicas de
América Latina y el Caribe,
España y Portugal.

www.redalyc.uaemex.mx.