

Predicción de campo acústico en tres medios para océanos estratificados mediante el método de modos normales

J. M. Quino-Cerdán
V. S. Rabinovich

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación,
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Instituto Politécnico Nacional.
Unidad Profesional "Adolfo López Mateos".
Col. Lindavista, México, DF, 07738.
MÉXICO.

Correo electrónico: jmquicer@hotmail.com

Recibido el 13 de septiembre de 2007; aceptado el 2 de julio de 2009.

1. Resumen

En este trabajo se presenta la teoría de modos normales aplicada en la transmisión de sonido debido a fuentes fijas ubicadas en aire para la aplicación de comunicaciones en océanos estratificados. El cálculo de la pérdida de transmisión se realiza para la característica del modelo Pekeris que consiste en una guía de onda que simula la capa de agua sobre un fondo. Los resultados obtenidos muestran el comportamiento del campo acústico en función de la distancia entre transmisor y receptor.

Palabras clave: modos normales, océano estratificado, campo acústico, modelo Pekeris.

2. Abstract (Propagation of Sound Wave in Three Media for the Stratified Oceans by Means of the Method of Normal-Mode)

The normal-mode theory is presented for the transmission of sound from a stationary source in a homogeneous air layer into an arbitrarily stratified ocean. Transmission loss calculations are performed for a Pekeris-type shallow-water environment consisting of an water layer over a uniform solid seabed. Numerical results are presented to illustrate the

acoustic field behavior depending on the distance between transmitter and receiver.

Key words: normal mode, stratified ocean, Pekeris-type.

3. Introducción

El problema de encontrar una expresión para determinar el campo acústico debido a fuentes fijas que están en el aire es nuevo ya que hasta ahora se ha trabajado en la determinación de campo acústico debido a fuentes que están ubicadas en agua, donde se refleja el interés común para muchos investigadores de encontrar resultados dentro de esta ciencia [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].

Ya que el medio de propagación es el océano, entonces debemos considerar dos importantes definiciones dentro de esta teoría oceanográfica y es lo denominado como "océano estratificado" y "océano casi estratificado". En el primer caso se considera al océano mediante una división por capas donde la velocidad del sonido sólo varía en forma vertical, entonces dicha velocidad se mantiene constante horizontalmente dentro de la capa. En el caso de océanos casi estratificados se considera la variación vertical y además una variación mínima horizontal de la velocidad del sonido.

Para encontrar el campo acústico P producido por una fuente fija o en movimiento dentro de un océano o fuera de él, se pueden utilizar tres métodos los cuales conducen a tres representaciones diferentes de P . Están el método de modos normales, el método de la transformada Hankel y el método de dispersión múltiple

El método de modos normales corresponde a una representación del campo acústico como una suma de cada modo normal el cual es determinado mediante una ecuación de dispersión que surge a partir de la ecuación de onda para cada capa con condiciones de frontera específicas. El siguiente paso es determinar la función de Green para finalmente encontrar los valores propios y las funciones generalizadas a partir de las soluciones en cada capa. Es así que el campo

acústico será representado mediante una suma de colección de rayos correspondiente a cada modo normal donde además el número de los modos normales es finito.

En los resultados que se presentan se consideró el modelo Pekeris el cual establece que tanto la velocidad del sonido como la densidad en cada medio serán constantes.

El estudio de la meteorología mundial mediante tomografía, imágenes del fondo del océano (barcos hundidos, montañas marítimas, rocas), identificación de nubes de burbujas formadas por el rompimiento de olas, detección y seguimiento de submarinos, seguridad en la navegación oceánica, mediciones de precipitaciones en el mar y localización de cardúmenes, ballenas son algunas de las aplicaciones.

4. Desarrollo

4.1. La fuente fija T_x está en el aire y el receptor R_x en el agua separados por una distancia r grande

En este caso la guía de onda tiene una altura definida entre h_1 y h_2 , además está sobre un fondo para el cual se conocen las características de velocidad del sonido c y densidad ρ tal como se ve en la figura 1.

Por lo tanto, la guía de onda queda limitada entre los valores de h_1 y h_2 donde el nivel h_1 representa la superficie oceánica.

Ahora se encontrará una expresión para la presión acústica P que satisface la ecuación de onda sobre R^3 como:

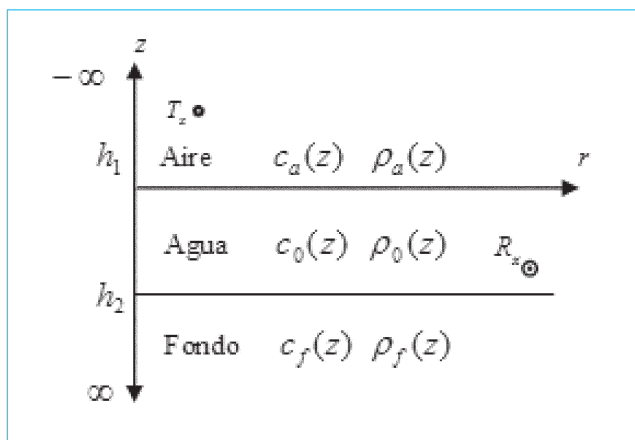


Fig. 1. Estructura de la guía de onda mediante su altura en función de la distancia para la fuente fija.

$$\left[\frac{1}{c^2(z)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x - \rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \rho^{-1}(z) \frac{\partial}{\partial z} \right] P(t,x,z) = F(t,x,z) \quad (1)$$

donde:

$$\Delta_x = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

es el laplaciano con respecto a las variables $(x_1, x_2) \in R^2$.

$F(t,x,z) = A(t)e^{-i\omega_0 t} \delta(x) \delta(z - z_0)$ es la fuente con amplitud $A(t)$ y frecuencia ω_0 y $\delta(x) \delta(z - z_0)$ es la ubicación de tal transmisor.

Las condiciones de frontera para (1) son:

$$[P(t,x,z)]_{z=\pm h} = \left[\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial P(t,x,z)}{\partial z} \right]_{z=\pm h} = 0 \quad (2)$$

Aplicando la transformada de Fourier a (1) se obtiene la ecuación inhomogénea de Helmholtz:

$$\Delta \hat{P}(w,x,z) + \frac{w^2}{c^2(z)} P(w,x,z) = -\hat{F}(w,x,z) \quad (3)$$

donde

$$\hat{P}(w,x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} P(t,x,z) e^{i\omega t} dt \quad (4)$$

Ahora se construirá la función de Green para la guía de onda:

$$\Delta G + \frac{w^2}{c^2(z)} G = \delta(x) \delta(z - z_0) \quad (5)$$

y se podrá expresar

$$P(w,x,z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) G(w,x,z,z_0) e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$$

Aplicando la transformada inversa de Fourier obtenemos el campo acústico:

$$P(w,x,z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} A(\tau') e^{i(\omega - \omega_0)\tau'} \times G(w,x,z,z_0) d\tau' \quad (6)$$

Por lo tanto el problema se reduce a encontrar la función de Green correspondiente al problema estacionario a partir de la siguiente ecuación:

$$\Delta_x + L(x,z, \frac{\partial}{\partial z}) G(w,x,z) = -\delta(x) \delta(z - z_0) \quad (7)$$

El operador $L(x,z, \frac{\partial}{\partial z})$ se define como

$$L(x,z, \frac{\partial}{\partial z}) u(x,z) = \left[\rho(z) \frac{\partial}{\partial z} \rho^{-1}(z) \frac{\partial}{\partial z} + \frac{w^2}{c^2(z)} \right] u(x,z)$$

Aplicando la transformada de Fourier con respecto a la variable x se obtiene:

$$(-|\xi|^2 + L(x, z, \frac{\partial}{\partial z})) \hat{G}(w, |\xi|, z) = -\delta(z - z_0) \quad (8)$$

donde:

$$\hat{G}(w, |\xi|, z) = \iint_{R^2} G(w, x, z) e^{i(x\xi)} dx \quad (9)$$

Por lo tanto $\hat{G}(w, |\xi|, z)$ es la solución de (8) que satisface las condiciones:

$$[\hat{G}(w, |\xi|, z)]_{z=\pm h} = \left[\frac{1}{\rho(z)} \frac{\partial \hat{G}(w, |\xi|, z)}{\partial z} \right]_{z=\pm h} = 0 \quad (10)$$

La definición de la función de Green es:

$$\hat{G}(w, |\xi|, z, z_0) = \frac{Y_1(w, |\xi|, z, z_0) Y_2(w, |\xi|, z, z_0)}{W(w, |\xi|, z)}$$

donde $Y_1(w, |\xi|, z, z_0)$, $Y_2(w, |\xi|, z, z_0)$ son soluciones de la ecuación:

$$(-|\xi|^2 + L(x, z, \frac{\partial}{\partial z})) Y(w, |\xi|, z) = 0$$

Ahora podemos escribir la función de Green en coordenadas polares:

$$G(w, r, z, z_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_1(w, \alpha, z, z_0) Y_2(w, \alpha, z, z_0)}{w(z, w, \alpha)} \alpha H_0^{(1)}(\alpha r) d\alpha \quad (11)$$

Se puede desarrollar esta última integral en términos de una suma:

$$G(w, r, z, z_0) = \sum_{j=1}^N G_j(w, r, z, z_0)$$

donde

$$G_j(w, r, z, z_0) = 2\pi i \operatorname{res} \left[\frac{Y_1(w, \alpha, z, z_0) Y_2(w, \alpha, z, z_0)}{w(z, w, \alpha)} \alpha H_0^{(1)}(\alpha r) \right]_{\alpha=\alpha_j}$$

Los α_j son las raíces de la ecuación de dispersión y $\varphi(w, \alpha_j, z)$ la solución del problema espectral:

$$L(x, z, \frac{\partial}{\partial z}) \varphi(w, \alpha_j, z) = \alpha_j^2 \varphi(w, \alpha_j, z), \quad z \in R$$

Finalmente se obtiene:

$$G_j(w, r, z, z_0) = \frac{\varphi(w, \alpha_j, z) \varphi(w, \alpha_j, z_0) H_0^{(1)}(\alpha_j r)}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^2(w, \alpha_j, z)}{\rho(z)} dz} \quad (12)$$

donde:

$$H_0^{(1)}(\alpha_j r) = \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_j r}} e^{i(\alpha_j r + \pi/4)} (1 + O(1/\alpha_j r))$$

es la asíntota de la función de Hankel para $r \rightarrow \infty$.

La contribución del modo normal en el campo acústico es:

$$G_j(w, r, z, z_0) = \sum_{j=1}^N \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha_j r}} \frac{\varphi(w, \alpha_j, z) \varphi(w, \alpha_j, z_0)}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi^2(w, \alpha_j, z)}{\rho(z)} dz} e^{i(\alpha_j r + \pi/4)} (1 + O(1/\alpha_j r)) \quad (13)$$

donde z es la ubicación del receptor y z_0 es la posición de la fuente, por otro lado cada modo normal $j = 1$ hasta N corresponde a una colección de rayos que viajan en la guía de onda los cuales contribuyen en la determinación total del campo acústico.

4.2. Resultados

Para obtener los resultados que muestran el comportamiento del campo acústico, resta encontrar el conjunto de soluciones $\varphi(w, \alpha_j, z)$ conocido como funciones generalizadas. Es así que se considerará una ecuación de onda para cada capa:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[\left[\frac{w}{c_a} \right]^2 - \alpha_j^2 \right] \right] \varphi_1(z) = 0 \quad ; \quad z < -h_1$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[\left[\frac{w}{c_0} \right]^2 - \alpha_j^2 \right] \right] \varphi_2(z) = 0 \quad ; \quad z \in (-h_1, h_2)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left[\left[\frac{w}{c_f} \right]^2 - \alpha_j^2 \right] \right] \varphi_3(z) = 0 \quad ; \quad z < h_2$$

Debido a que se trata de un problema con diferentes medios, será necesario aplicar las siguientes condiciones de frontera:

$$1) \lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi_1(z) = 0$$

$$2) \varphi_1(0) = \varphi_2(0)$$

$$3) \frac{1}{\rho_a} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{z=0}$$

$$4) \varphi_2(h_2) = \varphi_3(h_2)$$

$$5) \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right)_{h_2} = \frac{1}{\rho_f} \left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \right)_{h_2}$$

$$6) \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi_3(z) = 0$$

Al resolver el conjunto de ecuaciones generadas por las condiciones de frontera, obtendremos la ecuación de dispersión:

$$\tan \left[\sqrt{\left[\frac{w}{c_f} \right]^2 - \alpha_j^2} h_2 \right] = \frac{\rho_0 \sqrt{\alpha_j^2 - \left[\frac{w}{c_f} \right]^2}}{\rho_f \sqrt{\left[\frac{w}{c_0} \right]^2 - \alpha_j^2}} + \frac{\rho_0 \sqrt{\alpha_j^2 - \left[\frac{w}{c_a} \right]^2}}{\rho_a \sqrt{\left[\frac{w}{c_0} \right]^2 - \alpha_j^2}} \quad (14)$$

$$= \frac{\rho_0 \sqrt{\alpha_j^2 - \left[\frac{w}{c_f} \right]^2}}{\rho_f \sqrt{\left[\frac{w}{c_0} \right]^2 - \alpha_j^2}} + \frac{\rho_0 \sqrt{\alpha_j^2 - \left[\frac{w}{c_a} \right]^2}}{\rho_a \sqrt{\left[\frac{w}{c_0} \right]^2 - \alpha_j^2}}$$

$$1 - \frac{\rho_0 \sqrt{\alpha_j^2 - \left[\frac{w}{c_f} \right]^2}}{\rho_f \sqrt{\left[\frac{w}{c_0} \right]^2 - \alpha_j^2}} - \frac{\rho_0 \sqrt{\alpha_j^2 - \left[\frac{w}{c_a} \right]^2}}{\rho_a \sqrt{\left[\frac{w}{c_0} \right]^2 - \alpha_j^2}}$$

Tal ecuación (14) no se puede resolver por métodos convencionales, es así que se debe recurrir a métodos computacionales para de esta manera encontrar los valores de los modos de propagación (α_j) que genera (14), estos modos propagados son también conocidos como parámetros espectrales y forman un conjunto finito con valores específicos. Ahora se proponen las soluciones para cada capa:

$$\varphi_1(w, \alpha_j, z) = e^{(z+h_1) \sqrt{\alpha_j^2 - \left[\frac{w}{c_a} \right]^2}} \quad ; \quad z < -h_1$$

$$\varphi_2(w, \alpha_j, z) = \sin \left[\sqrt{\left[\frac{w}{c_0} \right]^2 - \alpha_j^2} z \right] \quad ; \quad z \in (-h_1, h_2)$$

$$\varphi_3(w, \alpha_j, z) = e^{-(z-h_2) \sqrt{\left[\frac{w}{c_f} \right]^2 - \alpha_j^2}} \quad ; \quad z < h_2$$

Usando (13), obtenemos la función de Green ya que contamos con las soluciones en cada capa para posteriormente utilizar (6) y así determinar el campo acústico.

Las figuras 2, 3, 4 y 5 muestran las pérdidas de transmisión TL que sufre el sonido en función de la distancia de separación entre transmisor y receptor mediante la siguiente ecuación:

$$TL(x,y,z,t) = 10 \log_{10} (|P(x,z,t)|^2) \quad (\text{dB}) \quad (15)$$

Se consideraron los siguientes datos:

$$c_a = 340 \text{ m/s}, \rho_a = 1.2 \text{ kg/m}^3$$

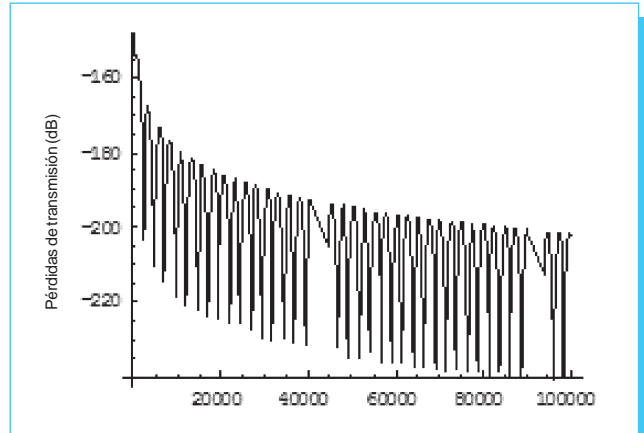


Fig. 2. Pérdidas de transmisión en función de la distancia entre transmisor y receptor considerando dos modos de propagación.

$$c_0 = 1520 \text{ m/s}, \rho_0 = 1000 \text{ kg/m}^3$$

$$c_f = 2000 \text{ m/s}, \rho_f = 2500 \text{ kg/m}^3$$

$$H = 1000 \text{ m},$$

$$f = 60 \text{ Hz}$$

Es posible variar la altura de la fuente fija aérea, así como también la profundidad del receptor, sin embargo para generar los resultados que más adelante se observan, se consideró 100 m de altura para la fuente y 500 m de profundidad para el receptor.

Las anteriores características del problema generarán los modos propagados que satisfacen la ecuación de dispersión (14). En

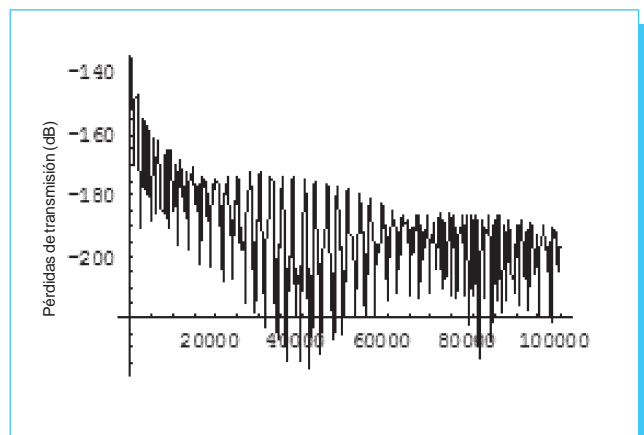


Fig. 3. Pérdidas de transmisión en función de la distancia entre transmisor y receptor considerando cuatro modos de propagación.

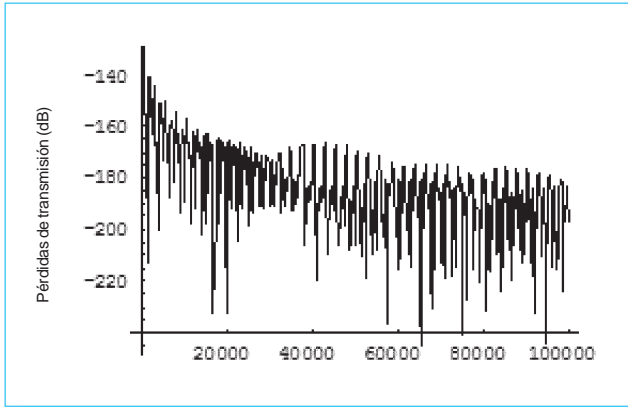


Fig. 4. Pérdidas de transmisión en función de la distancia entre transmisor y receptor considerando cinco modos de propagación.

este caso se encontraron 50 modos que tienen una parte real significativa y una parte imaginaria muy pequeña, por otro lado será posible encontrar el campo total generado debido a estos 50 modos, sin embargo los primeros modos son encargados de llevar la mayor parte de la información y es así que se presentan los resultados considerando tales modos fundamentales.

En las anteriores figuras se ve el comportamiento del campo acústico a medida que se consideran más modos propagados, es decir, cuando más familias de rayos llegan al receptor. El nivel de campo acústico mejora cuando en el modelo matemático aumentamos las contribuciones de los modos, lo cual se ve en la suma de la ecuación (13).

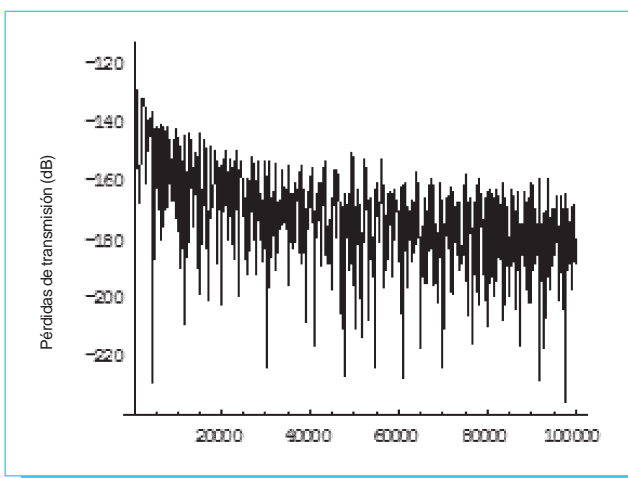


Fig. 5. Pérdidas de transmisión en función de la distancia entre transmisor y receptor considerando 15 modos de propagación.

En los anteriores resultados gráficos podemos ver un comportamiento decreciente del campo acústico en función de la distancia ya que a medida que se aleja el receptor menor será el sonido que recibirá. Por otro lado la consideración de más modos de propagación contribuye al nivel de señal para la comunicación dando una mejor aproximación para predecir el comportamiento del campo acústico porque con más modos llegarán más familias de rayos al receptor. El número de modos de propagación es finito y además está limitado por los valores de la frecuencia f y de la altura de la guía de onda considerada para este caso entre h_1 y h_2 .

Finalmente, en los resultados numéricos presentados se consideró una amplitud de la fuente $A(t) = 1$, es así que el nivel de señal obtenido podrá ser mayor si consideramos fuentes con mayor amplitud y además a una distancia cercana de la superficie oceánica garantizando así la recepción de sonido a muy grandes distancias.

5. Conclusiones

Se presentó la teoría de modos normales para la solución de un nuevo problema encaminado a la propagación de sonido en océanos debido a fuentes aéreas donde la variación de la velocidad del sonido fue únicamente en forma vertical, es decir con respecto a la profundidad.

Se obtuvieron predicciones para la pérdida de transmisión para el problema de tres medios considerando el modelo de océano Pekeris para frecuencias de 60 Hz mediante la contribución de cada modo normal expresada como suma finita de cada colección de rayos que viajan por la guía de onda.

Se determinó una representación explícita del campo acústico en función de parámetros muy importantes que involucra las especificaciones de las características geométricas de la guía de onda oceánica y las características también del medio donde se propaga el sonido, es así que tenemos un método que nos permite descomponer el campo acústico en forma modal y de esta manera podemos ver las gráficas de tales contribuciones.

Los trabajos futuros sobre este problema están encaminados a considerar la superficie del océano no-plana, fuentes en movimiento y modelos para océanos casi estratificados.

Agradecimientos

El primer autor da las gracias al CONACYT-MEXICO por la beca recibida durante sus estudios de doctorado en el IPN y a la M. en C. Jael Tercero Andrade por su colaboración en la parte de redacción.

6. Referencias

- [1] K. Hawker, "A normal mode theory of acoustic doppler effects in the ocean waveguide," in *J. Acoust. Soc. Am.*, 1979, pp. 675-681.
- [2] G. Lighthill, *Waves in fluids*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.
- [3] P. H. Lim y J. M. O'zard, "On the underwater acoustic field of a moving point source", I. Range-independent environment, *J. Acoust. Soc. Am.*, **95** (1), 1994, pp. 131-137.
- [4] V. S. Buldyrev y N. S. Grigoryeva, "Acoustic field generated by a moving atmosphere source in a fluid layer with variable thickness", in *Akusticheskii journal* **39**, 1993, pp. 782-792.
- [5] V.I. Ichev, V.S. Rabinovich. E.A. Rivelis y U.V. Hoha, "Acoustis field of a moving narrow-band source in oceanic waveguides", in *Dokl.Akad.Nauk SSSR*, **304**, 1989, no. 5, pp. 1123-1127 (in Russian).
- [6] O.A. Obrezanova y V.S. Rabinovich, "Acoustic field of a source moving along stratified waveguide sourface", in *Akusticheskii journal*, **39**, 1993, no.3 pp. 517-521 (in Russian).
- [7] O.A. Obrezanova y V.S. Rabinovich, "Acoustic field generated by moving sources in stratified waveguides". In *Wave Motion*, **27**, 1998, pp. 155-167.

Científica

indizada en:

Latindex:

Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal.
www.latindex.unam.mx.

Periódica:

Índice de Revistas Latinoamericanas en Ciencias.
<http://www.dgbiblio.unam.mx/>
http://132.248.9.1:8991/F/-/?func=find-b-0&local_base=PER01

Redalyc:

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal. Sistema de Información Científica Redalyc.
www.redalyc.uaemex.mx.