

# Un método de cálculo de mecanismos de levas planos con las propiedades óptimas de magnitud mínima\*

**Boris F. Voronin<sup>1</sup>**

**Salvador Gutiérrez-Alcalá<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Departamento de Ingeniería Mecánica Eléctrica, CUCEI, Universidad de Guadalajara, Av. Revolución, 1500, CP 44430, Guadalajara, Jalisco, MÉXICO.

<sup>2</sup>Departamento de Ingeniería Mecatrónica, Universidad Panamericana, Guadalajara, Jalisco, MÉXICO.

Correo electrónico: boris.voronine@ucei.udg.mx

Recibido el 14 de noviembre de 2007; aceptado el 9 de enero de 2009.

## 1. Resumen

Se propone un nuevo método analítico para la determinación del centro de rotación de la leva. Este método de manera única y sencilla determina el radio del círculo primario de la leva, que permite diseñar el mecanismo con las propiedades óptimas de magnitud mínima.

En la primera parte se exponen los fundamentos teóricos usados para el desarrollo del método. Mientras que en la segunda parte se muestran el desarrollo del mismo y su empleo para el cálculo del radio del círculo primario de la leva para los mecanismos con seguidor lineal alternativo con la punta en forma de cuña, con rodillo, de zapata curva o de cara plana. El enfoque propuesto es confirmado con el uso de métodos gráficos.

\*El tema presentado en el artículo fue discutido en "The 9th International Scientific Conference devoted to the 45th anniversary of Siberian State Aerospace University named after academican M.F. Reshetnev", c. Krasnoyarsk, Rusia, en 2005 y en el XIII Congreso Internacional de la SOMIM. Durango, México, en 2007.

En resumen, en este artículo se presenta el método para los mecanismos planos de los cuales se toman en cuenta solamente aquellos con el seguidor de movimiento lineal alternativo.

**Palabras clave:** teoría de mecanismos, cálculo de mecanismos de levas.

## 2. Abstract (A Method of Calculation of Flat Mechanisms of Cams with the Optimum Properties of Minimal Size)

A new analytical method for the determination of the center of rotation of the cam is proposed. This method in the unique and simple way determines the radius of the primary circle of the cam that allows designing a mechanism with the optimal properties of minimal magnitude.

In the first part are exhibited the theoretical foundations used for the development of the method. While in the second part its development and its use for calculation of radius of the primary circle of the cam for the mechanisms with linear alternative follower with the top in the shape of wedge, with roller, of curved shoe or of flat face are shown. The proposed approach is confirmed by the use of graphic methods.

In short, in this paper is shown the method for the flat mechanisms of which are taken in account only the ones with the follower of linear alternative movement.

**Key words:** theory of mechanisms, calculation of the cam mechanisms.

## 3. Introducción

El diseño de mecanismos de levas consta de dos partes principales: determinación de la magnitud del radio del círculo primario y construcción de su perfil en correspondencia con la ley de movimiento. El presente artículo está dedicado a la solución del primer problema ya que con ésta se obtiene el mecanismo con las propiedades óptimas del tamaño mínimo. Para mostrar el potencial del enfoque propuesto se realiza el

análisis de mecanismos con el seguidor de movimiento lineal alternativo que toca la superficie curvilínea de la leva con la punta hecha ya sea en forma de cuña, de rodillo, de zapata curva o de cara plana.

Para los mecanismos de seguidor de cuña, de rodillo y de zapata curva, el limitante es el ángulo de presión. El método gráfico presentado en algunos libros de texto [8, 9] se basa en la dependencia matemática que relaciona el ángulo de presión  $\alpha$  con la magnitud de desplazamiento  $s$  y la velocidad  $v$  del seguidor [3, 5, 7, 8, 9]. Su forma analítica es:

$$\tan \alpha = \frac{s' - e}{s + \sqrt{r_0^2 - e^2}} \quad (1)$$

en donde  $e$  es la excentricidad (la distancia más corta entre el centro de rotación de la leva y la trayectoria de la punta del seguidor);  $s'$  es el análogo de velocidad de la punta del seguidor y  $r_0$  es el radio del círculo primario de la leva.

Según este método, en el sistema de coordenadas  $s, s'$  se construye el diagrama adicional  $s' = s'(s)$  a escala  $\mu_L$ . Si el mecanismo es de cierre geométrico del par cinemático superior al diagrama construido se trazan líneas tangentes de modo que formen con la línea de la trayectoria de la punta del seguidor un ángulo igual al de presión admisible  $\alpha_{adm}$  (véase también la aplicación práctica del método gráfico presentada para un mecanismo de cierre de fuerza del par cinemático superior en la tabla 1 y la figura 2 del artículo presente). Con esta construcción en la intersección de las tangentes se define el centro de rotación de la leva y, por consiguiente, el radio del círculo primario de la leva de magnitud mínima  $r_{min}$ . Este método brinda una exactitud de entre el 3 y el 5 por ciento, que es suficiente para la mayor parte de problemas de ingeniería mecánica.

El método analítico presentado en varios libros de texto [8, 9], que simplificando el diagrama adicional toma puntos extremos (con la velocidad máxima) como puntos de toque de la tangente, no es correcto y puede llevar a un error grande.

La recomendación en [7] que toma la dependencia (1) y recomienda encontrar, con la derivada de  $s'$ , los valores del ángulo de giro de la leva  $\phi$ , que proporcionan el ángulo de presión máximo y mínimo, no está desarrollada ya que, según el autor, "es un proceso matemático tedioso". Por eso esta recomendación no es posible ni apreciar, ni usar.

En el libro [5] se recomienda utilizar el programa DYNACAM, o algunas otras, así como MatLab, TKSolver, o Mathcad y mediante el cálculo de numerosas variantes "encontrar un

arreglo adecuado". Realizar esta recomendación es muy difícil ya que la elección de una sola variante de numerosas otras es un proceso muy complejo y laborioso. Un método semejante se propone en [3].

En otros libros, así como en [1, 4, 6], no se toca la solución de este problema.

Para los mecanismos con el seguidor de cara plana el ángulo de presión no depende de la posición de la leva. Si la cara es perpendicular a la trayectoria del desplazamiento del seguidor éste siempre será igual a cero. Para este tipo de mecanismos la condición más importante es la convexidad del perfil de la leva, lo que se expresa en la fórmula de J. L. Herónimus [2]:

$$r + s + s'' > 0 \quad (2)$$

en donde  $s''$  es el análogo de aceleración del seguidor.

La presentación gráfica de ésta es la siguiente: en el sistema de coordenadas  $s, s''$  se construye el diagrama adicional  $s'' = s''(s)$  en cuya porción negativa se traza una tangente que forma un ángulo de  $45^\circ$  con la trayectoria del seguidor. En la intersección de la tangente con la trayectoria del seguidor se encuentra el centro de rotación de la leva cuyo círculo primario va a tener el radio mínimo (véase también la aplicación práctica de este método presentada en la tabla 2 y la figura 5 del presente).

Para este tipo de mecanismos es posible emplear los puntos del diagrama adicional con valores máximos de la magnitud de aceleración como los de tangencia porque el error será pequeño en comparación con el primer caso.

A continuación se presentan métodos analíticos para ambos casos que, de una sola manera, definen el radio del círculo primario de la leva de magnitud mínima.

#### 4. Principios de la determinación del centro de rotación de la leva

Para los mecanismos con el seguidor de cuña, de rodillo y de zapata curva. Para estos tipos de mecanismos, como base, se toma la interpretación gráfica antes descrita. Por eso para definir el centro de rotación de la leva se necesita determinar dos líneas tangentes al diagrama adicional, presentarlas en forma analítica y encontrar el punto de su intersección.

Para una mejor comprensión del método se toma el mecanismo con cierre de fuerza del par cinemático superior con excentricidad  $e$  diferente de cero. Para estos mecanismos la leva es el eslabón impulsor solamente en la fase de subida, en

la fase de retorno el eslabón impulsor es el seguidor, por eso el ángulo de presión es limitado solamente para la fase de subida. Debido a esto, para los mecanismos citados, es suficiente construir el diagrama adicional  $s' = s'(s)$  solamente para esta fase.

En la figura 1 está presentado el sistema de coordenadas  $s, s'$  construido de modo que el eje  $s$  coincide con la trayectoria de la punta del seguidor. Su inicio se ubica en el inicio de desplazamiento de la misma punta  $B_0$ .

El diagrama se construye en el sistema de coordenadas  $s, s'$  para una sola posición del mecanismo. En esta posición la punta  $B$  del seguidor está desplazada a distancia  $H_B = \mu_L \cdot s_B$  desde el inicio de desplazamiento  $B_0$ , en donde  $\mu_L$  es la escala en que se presenta el diagrama, y  $s_B$  es la magnitud del segmento que representa dicho desplazamiento (en la figura 1 tiene magnitud de  $B_0B$ ). La velocidad lineal de este punto es de:  $v_B = s_B' \omega$ , en donde  $s_B'$  es el análogo de velocidad y  $\omega$  es la velocidad angular de la leva. Por esta razón el diagrama citado se reduce a un solo punto  $D$ .

Al trazar a través de este punto la línea  $\tau\text{-}\tau$  al ángulo  $\alpha_{adm}$  respecto al eje  $s$  en la intersección de ésta con la recta  $a\text{-}a$  trazada a distancia  $e$  desde el eje  $s$ , se encuentra el centro de rotación de la leva  $O$ . La circunferencia trazada a partir de este punto a través del inicio del sistema de coordenadas  $B_0$  será la del círculo primario con el radio de magnitud mínima  $r_{min}$ . Utilizando la figura 1 se tiene:

$$r_{min} = \sqrt{(Od)^2 + e^2} \tag{3}$$

Dado que  $Od = \frac{s' - e}{\tan \alpha_{adm}} - s$ , en donde  $s = s(\varphi)$  y su derivada es  $s' = [ds/d\varphi]_{\varphi=\varphi_i}$ , resulta:

$$r_{min} = \sqrt{\left[ \frac{s' - e}{\tan \alpha_{adm}} - s \right]^2 + e^2} \tag{4}$$

Ya que la posición del mecanismo fue elegida arbitrariamente entonces el diagrama puede tener puntos en que el ángulo de presión tiene mayor magnitud que el admisible. Para que la condición  $\alpha \leq \alpha_{adm}$  sea cumplida en todas las posiciones del mecanismo, la recta  $\tau\text{-}\tau$  debe ser tangente al diagrama adicional formado por el conjunto infinito de los puntos  $D$  y la magnitud de  $r_{min}$  debe ser máxima.

En cálculo se sabe que una función de una variable tendrá un valor extremo (mínimo o máximo) en el punto en que la derivada

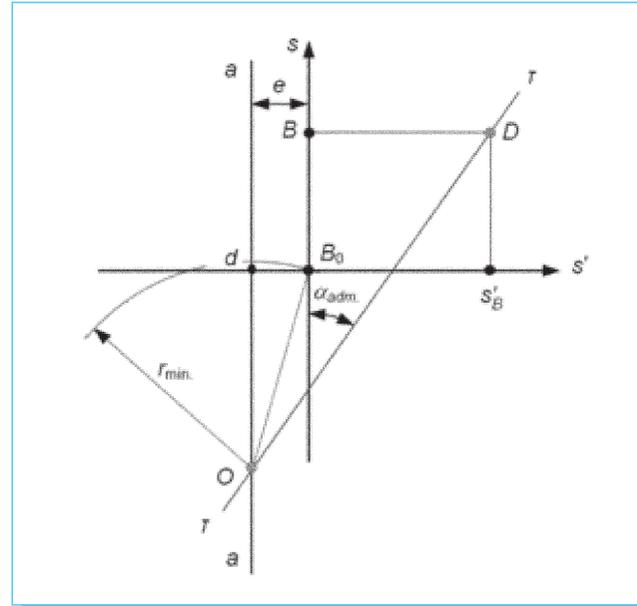


Fig. 1. Representación gráfica de la determinación del centro de rotación de la leva mediante el método analítico.

con respecto a la variable es igual a cero. Para el presente caso dicha condición se obtiene mediante la igualación a cero de la derivada de la ecuación (4), es decir:

$$r'(\varphi) = 0 \tag{5}$$

En forma desarrollada ésta va a tener la siguiente forma:

$$r' = (s'' - s' \tan \alpha_{adm}) \times [(s' - s \tan \alpha_{adm} - e)^2 + e^2 \tan^2 \alpha_{adm}]^{-1/2} \tag{6}$$

Analizando la ecuación (6) se llega a una conclusión, que la (5) se cumpla en dos casos:

- a) cuando el primer coeficiente  $(s'' - s' \tan \alpha_{adm})$  es igual a cero y el segundo  $[(s' - s \tan \alpha_{adm} - e)^2 + e^2 \tan^2 \alpha_{adm}]^{-1/2}$  es determinado;
- b) cuando el primer coeficiente  $(s'' - s' \tan \alpha_{adm})$  es determinado y el segundo  $[(s' - s \tan \alpha_{adm} - e)^2 + e^2 \tan^2 \alpha_{adm}]^{-1/2}$  tiende al infinito.

El segundo caso se cumple solamente con  $\alpha_{adm} = 90^\circ$  que está fuera de límites reales para los mecanismos de leva. Entonces, resulta válido solamente el primer caso, el que es más conveniente presentar en forma:

$$s'' = s' \tan \alpha_{adm} \quad (7)$$

Para mostrar su aplicación se considera el ejemplo de un mecanismo de leva plano con cierre de fuerza del par cinemático superior. Se consideran los siguientes datos: el ángulo de la fase de subida como  $\beta = 130^\circ$ ; la carrera del seguidor igual a  $H = 0.04$  m; la excentricidad en magnitud  $e = 0$  y el ángulo de presión admisible igual a  $\alpha_{adm} = 30^\circ$ . Para este mecanismo se considera la función de desplazamiento en la siguiente forma:

$$s = \frac{H}{2} \left[ 1 - \cos \frac{\pi\phi}{\beta} \right] \quad (8)$$

Entonces su primera derivada con respecto a la variable independiente  $\phi$  (la posición angular de la leva) resulta ser:

$$s' = \frac{\pi H}{2\beta} \operatorname{sen} \frac{\pi\phi}{\beta} \quad (9)$$

y la segunda:

$$s'' = \frac{\pi^2 H}{2\beta^2} \cos \frac{\pi\phi}{\beta} \quad (10)$$

Al sustituir las ecuaciones (9) y (10), en (7), simplificando y despejando, se obtiene la fórmula para la obtención del valor del ángulo de la posición de la leva  $\phi^*$  cuando la  $\tau$ - $\tau$  es tangente al diagrama adicional:

$$\phi^* = \frac{\beta}{\pi} \arctan \frac{\pi}{\beta \tan \alpha_{adm}} \quad (11)$$

Ahora bien, sustituyendo los coeficientes en la ecuación (11) por sus valores numéricos se obtiene que  $\phi^* = 48.64^\circ$ . Haciendo lo mismo en las ecuaciones (8) y (9) y sustituyendo en (4) los términos y coeficientes por sus valores, se recibe  $r_{min} = 0.03197$  m, o  $r_{min} = 31.97$  mm.

Para comprobar la validez del enfoque analítico descrito se usa, como más evidente, el método gráfico. Para esto se usan los mismos datos.

En la tabla 1 se muestran resultados de cálculo de las ecuaciones (8) y (9), necesarios para la construcción del diagrama adicional, y en la figura 2 el diagrama construido en el sistema de coordenadas  $s, s'$  a escala  $\mu_L = 0.001$  m/mm, acompañado con las reglas.

Ya que  $e = 0$  entonces el centro de rotación de la leva debe ser ubicado en el eje  $s$ . Al trazar la  $\tau_1$ - $\tau_1$  tangente al diagrama

Tabla 1. Datos para la construcción del diagrama adicional.

| $\phi$ ,<br>grad. | $k = \frac{\phi}{\beta}$ | $s$ , mm | $s'$ , mm/rad |
|-------------------|--------------------------|----------|---------------|
| 0                 | 0.000                    | 0.00     | 0.00          |
| 10                | 0.077                    | 0.58     | 0.58          |
| 20                | 0.154                    | 2.29     | 2.29          |
| 30                | 0.231                    | 5.03     | 5.03          |
| 40                | 0.308                    | 8.64     | 8.64          |
| 50                | 0.385                    | 12.91    | 12.91         |
| 60                | 0.462                    | 17.59    | 17.59         |
| 70                | 0.538                    | 22.41    | 22.41         |
| 80                | 0.615                    | 27.09    | 27.09         |
| 90                | 0.692                    | 31.36    | 31.36         |
| 100               | 0.769                    | 34.97    | 34.97         |
| 110               | 0.846                    | 37.71    | 37.71         |
| 120               | 0.923                    | 39.42    | 39.42         |
| 130               | 1.000                    | 40.00    | 40.00         |

adicional, en el cruce de ésta con el eje  $s$  se encuentra el punto  $O$  que se considera el centro de rotación de la leva. Trazando a partir de este punto una circunferencia a través del inicio del sistema de coordenadas  $B_0$  y midiendo su radio se obtiene que  $r_{min} \approx 32.0$  mm.

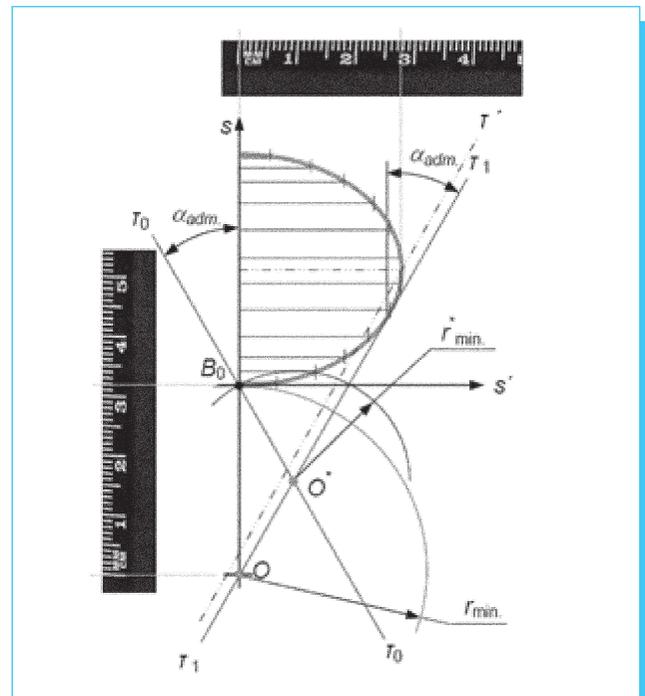


Fig. 2. Prueba gráfica de validez del método analítico para el mecanismo central,  $e = 0$ .

La comparación de los resultados obtenidos muestra plena coincidencia del cálculo analítico presentado con la construcción gráfica.

Ahora, usando la misma figura, se puede añadir lo siguiente. Si uno de los más importantes requisitos es la obtención del mecanismo de tamaño mínimo, entonces el centro de rotación de la leva se ubicará en la intersección de la tangente  $\tau_1-\tau_1$  con la recta  $\tau_0-\tau_0$  que se traza a través del inicio del sistema de coordenadas  $s', s$  al mismo ángulo  $\alpha_{adm}$ . En este caso el radio mínimo  $r_{min}^*$  será igual al segmento  $O^*B_0$ . Al usar la figura 2 se concluye que  $r_{min}^* = OB_0 / 2 \cos \alpha_{adm}$ .

En los cálculos hay que tener en cuenta los errores posibles en fabricación. Por eso para asegurarse que la condición  $\alpha \leq \alpha_{adm}$  sea cumplida en todas las posiciones del mecanismo, el radio  $r$  del círculo primario de la leva se toma un poco mayor que  $r_{min}$ . En la mayoría de los casos es suficiente tomar  $r = (1.03 - 1.05)r_{min}$ .

Además de este análisis, usando la figura 2 se puede apreciar la exactitud del método analítico presentado en [8, 9] que, para el cálculo, recomienda tomar los puntos extremos del diagrama adicional, con velocidad máxima, como los de tangencia. Al trazar la línea  $\tau'-\tau'$  a través del punto extremo del diagrama adicional con  $s'$  máxima y medir las magnitudes de  $r_{min}$ . Se llega a una conclusión que para el mecanismo con  $e = 0$  el error sería de 12.6 por ciento, mientras que para el mecanismo de dimensiones mínimas el error sería de 11.6 por ciento, lo que es considerablemente mayor que el error del método gráfico y, por consiguiente, no es aceptable.

Para la determinación del punto de intersección de las rectas  $y$ , como consecuencia, del centro del círculo primario, resulta más conveniente usar la forma paramétrica. Ésta consiste en lo siguiente. Al definir las coordenadas del punto de tangencia de la línea  $\tau-\tau$  al diagrama adicional, por ejemplo el punto  $D$  mostrado en la figura 3 con las coordenadas  $s'$  y  $s$ , también teniendo en cuenta que el segmento  $BD$  es igual al análogo de velocidad  $s'_B$ , la ecuación de la tangente  $\tau-\tau$  se escribirá en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x &= s' + t \operatorname{sen} \alpha_{adm} \\ y &= s + t \operatorname{cos} \alpha_{adm} \end{aligned} \quad (12)$$

en donde  $t$  es el parámetro de la tangente  $\tau-\tau$ .

Si uno de los requisitos es que el centro de rotación de la leva se ubique en la recta  $a-a$  trazada a una distancia  $e$  respecto a la trayectoria del movimiento de la punta del seguidor, entonces su ecuación se presentará en la siguiente forma:

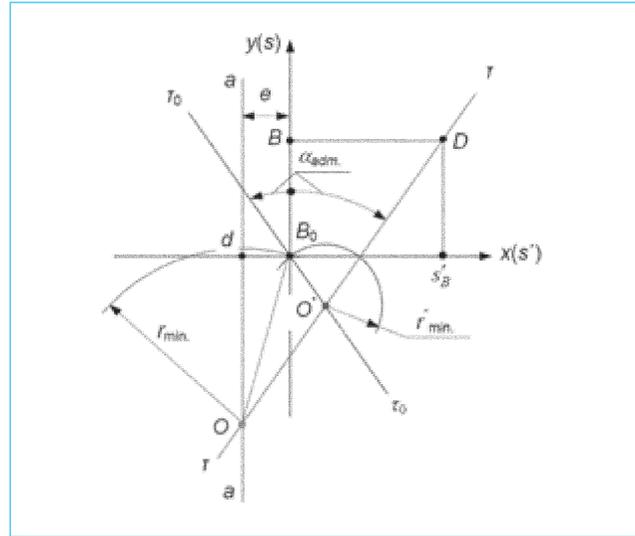


Fig. 3. Determinación del punto de intersección en forma paramétrica.

$$x_a = e, \quad y_a = t_a \quad (13)$$

en donde  $t_a$  es el parámetro de la recta  $a-a$ . Así pues, el punto de intersección de éstas va a ser determinado mediante la siguiente igualdad:

$$x_a = x, \quad y_a = y \quad (14)$$

Sustituyendo (12) y (13) en (14) y después de algunas simplificaciones resulta:

$$O_d = t_a = - \left[ \frac{s' - e}{\tan \alpha_{adm}} - s \right]$$

En la figura 3 se ve que el radio mínimo del círculo primario es igual al segmento  $OB_0$ , por eso se tiene:

$$r_{min} = OB_0 = \sqrt{t_a^2 + e^2} = \sqrt{\left[ \frac{s' - e}{\tan \alpha_{adm}} - s \right]^2 + e^2} \quad (15)$$

Hay que notar que la fórmula (15) completamente coincide con la (4), pero es obtenida de otro modo.

Si es necesario diseñar un mecanismo con dimensiones mínimas, se encuentra el punto de intersección de la tangente  $\tau-\tau$  y de la recta  $\tau_0-\tau_0$ , que se traza a través del punto  $B_0$  al mismo ángulo de presión admisible  $\alpha_{adm}$ . La ecuación de la recta  $\tau_0-\tau_0$  se presenta como:

$$\begin{aligned} x_0 &= -t_0 \operatorname{sen} \alpha_{adm} \\ y_0 &= t_0 \operatorname{cos} \alpha_{adm} \end{aligned} \quad (16)$$

mientras que la  $\tau$ - $\tau$  es de la forma (12). La intersección de la recta  $\tau_0$ - $\tau_0$  con la tangente  $\tau$ - $\tau$  se determina mediante:

$$x_0 = x, \quad y_0 = y \quad (17)$$

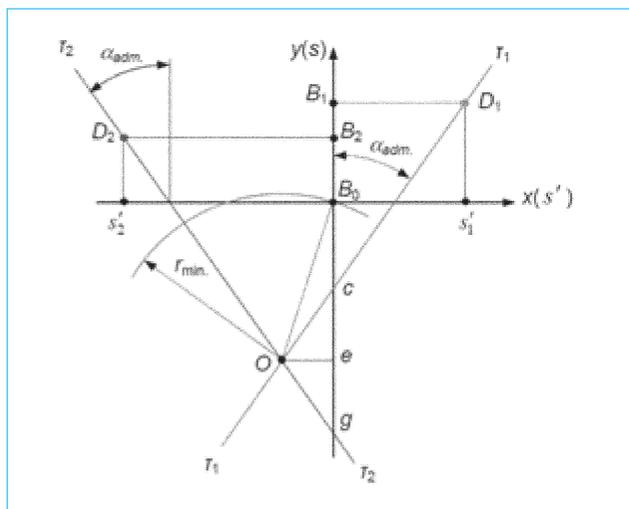
Ésta en la figura 3 está marcada con la letra  $O^*$ .

Al sustituir (12) y (16) en (17) resulta:

$$r_{min}^* = t_0 = \frac{s \tan \varphi_{adm} - s'}{2 \operatorname{sen} \varphi_{adm}} \quad (18)$$

Para el mecanismo de cierre geométrico del par cinemático superior, en que la leva es el eslabón impulsor tanto para la fase de subida como para la de retorno, se trazan tangentes para ambas fases del diagrama adicional. Por esta razón también para ambas fases se deducen y se resuelven las ecuaciones iguales a (7).

Suponiendo que el punto  $D_1$  mostrado en la figura 4 es de tangencia de la recta  $\tau_1$ - $\tau_1$  al diagrama adicional en la fase de subida y que  $D_2$  es el de tangencia de la  $\tau_2$ - $\tau_2$  en la fase de retorno, entonces, el punto  $O$ , de intersección de éstas, será el centro del círculo primario de radio  $r_{min}$ , su magnitud será igual al segmento  $OB_0$ .



**Fig. 4.** Diagrama para la composición de las ecuaciones que definen el centro de rotación de la leva de mecanismos con cierre geométrico del par cinemático superior.

En forma paramétrica la solución es como sigue: la ecuación de la tangente  $\tau_1$ - $\tau_1$  se presentará como:

$$\begin{aligned} x_1 &= s_1' + t_1 \operatorname{sen} \alpha_{adm} \\ y_1 &= s_1 + t_1 \operatorname{cos} \alpha_{adm} \end{aligned} \quad (19)$$

y de la  $\tau_2$ - $\tau_2$  así:

$$\begin{aligned} x_2 &= -(s_2' + t_2 \operatorname{sen} \alpha_{adm}) \\ y_2 &= s_2 + t_2 \operatorname{cos} \alpha_{adm} \end{aligned} \quad (20)$$

El punto  $O$  de intersección de éstas se determinará mediante la siguiente igualdad:

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2 \quad (21)$$

Con la resolución del sistema de ecuaciones (21) se obtiene:

$$t_2 = \frac{s_1 - s_2}{2 \operatorname{cos} \alpha_{adm}} - \frac{s_1' - s_2'}{2 \operatorname{sen} \alpha_{adm}} \quad (22)$$

Al sustituir en (20) el coeficiente  $t_2$  por su valor en (22) resulta:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} [s_1' - s_2' - (s_1 - s_2) \tan \alpha_{adm}] \\ y_2 &= \frac{1}{2} \left[ s_1 + s_2 - \frac{s_1' + s_2'}{\tan \alpha_{adm}} \right] \end{aligned} \quad (23)$$

y como consecuencia:

$$r_{min} = OB_0 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \quad (24)$$

El método puede ser usado de igual manera para los mecanismos con el seguidor oscilante. La diferencia consiste en que la ley de movimiento del seguidor debe ser presentada en la siguiente forma  $\theta = f(\varphi)$ , en donde  $\theta$  es el ángulo de oscilación del seguidor. Por eso, la ecuación (3) se presentará en la siguiente forma:

$$r_{min} = \left[ \frac{\theta'}{\tan \varphi_{adm}} - \theta \right] L^2 \quad (25)$$

El resto del procedimiento es igual al ya presentado.

Para los mecanismos con el seguidor de cara plana. Para los razonamientos expuestos a continuación, resulta más conveniente escribir la fórmula (2) de la siguiente manera:

$$r = -(s + s') \quad (26)$$

Como en el ejemplo anterior, el radio mínimo debe tener valor máximo. Eso permite emplear el enfoque ya presentado. El método consiste en la igualación a cero de la derivada de la ecuación (26), es decir:

$$r' = -(s' + s'') = 0 \quad (27)$$

Con la solución de la ecuación (27) se determina la posición angular de la leva  $\varphi^*$  con la cual la recta, trazada a  $45^\circ$  respecto a la trayectoria del seguidor, es tangente a la parte negativa del diagrama adicional  $s'' = s'(s)$ .

A continuación se muestra un ejemplo de uso del método. Para esto, en la fase de retorno se toma la función de desplazamiento del seguidor en la siguiente forma:

$$s = H \left[ 1 - \frac{\varphi}{\beta} + \frac{1}{2\pi} \sin 2\pi \frac{\varphi}{\beta} \right] \quad (28)$$

en donde  $H$  es la carrera del seguidor;  $\beta$  es el ángulo de la fase de retorno de la leva, y  $\varphi$  es la posición angular de la leva.

Entonces su primera, segunda y tercera derivadas con respecto a la variable  $\varphi$  resultan ser:

$$s' = -\frac{H}{\beta} \left[ 1 - \cos \frac{2\pi\varphi}{\beta} \right] \quad (29)$$

$$s'' = -\frac{2\pi H}{\beta^2} \sin \frac{2\pi\varphi}{\beta} \quad (30)$$

$$y \quad s''' = -\frac{4\pi^2 H}{\beta^3} \cos \frac{2\pi\varphi}{\beta} \quad (31)$$

Para el cálculo se consideran los siguientes datos:  $H = 0.02$  m y  $\beta = 60^\circ$ .

Para el ejemplo seleccionado la ecuación (27) tomará la forma:

$$r' = \frac{H}{\beta} \left[ 1 - \cos \frac{2\pi\varphi}{\beta} + \frac{4\pi^2}{\beta^2} \cos \frac{2\pi\varphi}{\beta} \right] \quad (32)$$

Para que la recta trazada al ángulo de  $45^\circ$  sea tangente al diagrama adicional debe cumplirse que:

$$r' = 0 \quad (33)$$

Al analizar la ecuación (32) puede verse que la (33) se cumple solamente en caso de que el coeficiente que está entre los paréntesis de la ecuación (32) sea igual a cero. Su solución tiene la siguiente forma:

$$\varphi^* = \frac{\beta}{2\pi} \arccos \frac{\beta^2}{\beta^2 - 4\pi^2} \quad (34)$$

Sustituyendo  $\beta$  por su valor numérico en (34), se recibe  $\varphi^* = 15.27^\circ$  y, sustituyendo los términos en (26) por sus valores numéricos se tiene:  $r_{\min} = 0.09645$  m o  $r_{\min} = 96.45$  mm.

Al igual que en el ejemplo anterior, el método es comprobado a través de su contraparte gráfica.

La tabla 2 incluye los datos necesarios para la construcción del diagrama adicional, y en la figura 5 se muestra la solución gráfica del problema. En el sistema de coordenadas  $s, s''$  con el inicio en el punto  $B_0$  se construye el diagrama adicional para la fase de retorno y al ángulo de  $45^\circ$  respecto al eje  $s$  se traza la tangente a su porción negativa. El punto  $O_1$  de intersección de la tangente con el eje  $s$  marca el centro de rotación de la leva. Trazando a partir de este punto una circunferencia a través del inicio del sistema de coordenadas  $B_0$  se construye el círculo primario de radio de magnitud mínima. Al medir su longitud con la regla se obtiene que  $r_{\min} \approx 97$  mm que muestra plena coincidencia con el cálculo analítico.

Es posible usar el presente método también para los mecanismos de seguidor oscilante de cara plana.

## 5. Conclusiones

De todo lo dicho anteriormente, es posible notar que se elaboró un nuevo método analítico, el que de manera única determina el centro de rotación de la leva de un mecanismo plano. Con éste se determina el radio del círculo primario de

**Tabla 2.** Datos necesarios para la construcción del diagrama adicional.

| $\varphi$ , grad. | $k = \frac{\varphi}{\beta}$ | $s$ , mm | $s''$ , mm/rad <sup>2</sup> |
|-------------------|-----------------------------|----------|-----------------------------|
| 0                 | 0.00                        | 20.00    | 0.00                        |
| 5                 | 0.08                        | 19.92    | -57.27                      |
| 10                | 0.17                        | 19.42    | -99.22                      |
| 15                | 0.25                        | 18.18    | -114.59                     |
| 20                | 0.33                        | 16.09    | -99.25                      |
| 25                | 0.42                        | 13.26    | -57.34                      |
| 30                | 0.50                        | 10.00    | 0.00                        |
| 35                | 0.58                        | 6.74     | 57.28                       |
| 40                | 0.67                        | 3.91     | 99.22                       |
| 45                | 0.75                        | 1.87     | 114.59                      |
| 50                | 0.83                        | 0.58     | 99.25                       |
| 55                | 0.92                        | 0.08     | 57.34                       |
| 60                | 1.00                        | 0.00     | 0.00                        |

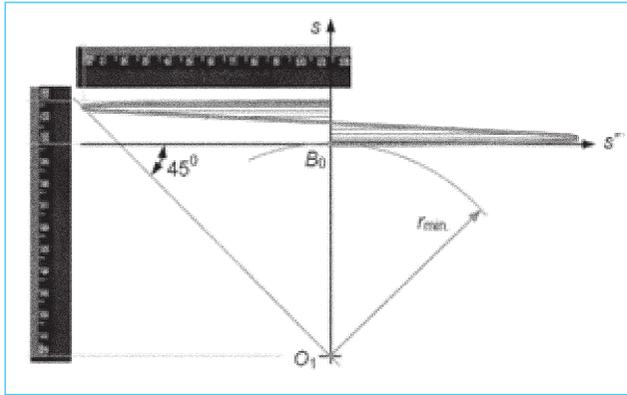


Fig. 5. Prueba de validez del método analítico de la determinación del centro de rotación de la leva del mecanismo de cara plana mediante la construcción gráfica.

magnitud mínima que permite obtener un mecanismo con las propiedades óptimas de magnitud mínima.

La comparación de los resultados obtenidos mediante el método analítico descrito con los resultados obtenidos mediante los métodos gráficos muestran la validez completa del enfoque propuesto.

Es posible apreciar que la forma de las dependencias analíticas es sencilla, ocupa habituales métodos matemáticos. Esto permite recomendar este método para el empleo tanto en el diseño de las máquinas como en la enseñanza en el sistema educativo.

#### Nomenclatura

- $e$  excentricidad.
- $s$  desplazamiento del seguidor.
- $s'$  análogo de velocidad (la primera derivada del desplazamiento lineal de la punta del seguidor en función al desplazamiento angular de la leva,  $s' = ds/d\varphi$ ).
- $s''$  análogo de aceleración (la segunda derivada del desplazamiento lineal de la punta del seguidor en función al desplazamiento angular de la leva,  $s'' = d^2s/d\varphi^2$ ).
- $r_0$  radio de círculo primario.
- $\mu_L$  escala en que se diseña el mecanismo o diagrama ( $\mu_L = L/l$ , en donde  $L$  es la longitud natural de la medición en metros y  $l$  es su presentación en el diagrama en milímetros).

- $\alpha$  ángulo de presión.
- $\varphi$  ángulo de giro de la leva.

#### Notas

- a) En los mecanismos planos la unión móvil de dos eslabones mediante superficies (cilíndricas, una de las cuales es exterior y la otra es interior, o planas) se considera un par cinemático inferior y mediante líneas y puntos (así como la unión de dos cilindros mediante las superficies exteriores) superior.
- b) Cierre de fuerza del par cinemático superior requiere que se aplique la fuerza externa para la realización del contacto continuo de dos eslabones y geométrico, o de forma, para la realización del contacto mediante la forma geométrica de la leva o del seguidor.

#### 6. Referencias

- [1] Erdman, Artur G. y Sandor, George N. "Diseño de Mecanismos". *Análisis y Síntesis*. Prentice Hall, México, 1998.
- [2] Heronimus, J.L. "Determinación del perfil de la leva por el movimiento dado del seguidor". *Técnica del Flota Aérea*, N3. Rusia, 1933.
- [3] Mabie, Hamilton H.; Reinholtz, Charles F. *Mecanismos y dinámica de maquinaria*. Limusa, México, 2004.
- [4] Marghitu, Dan B., Crocker, Malcolm J. *Analytical Elements of Mechanisms*. Cambridge University Press, 2001.
- [5] Norton, Robert L. *Diseño de maquinaria. Síntesis y análisis de máquinas y mecanismos*. McGraw-Hill, México, 2005. pp. 329-401.
- [6] Pérez, Roque Calero y José Antonio Carta. *Fundamentos de Mecanismos y Máquinas para ingenieros*. McGraw-Hill, México, 1999, pp. 244-245.
- [7] Shigley, Joseph Edward, Uicker, John Joseph Jp. *Teoría de máquinas y mecanismos*, McGraw-Hill, México, p.p. 245, 1999.
- [8] "Teoría de Mecanismos". En *Redactado por V.A. "Vishaya Shkola"*, Moscú, Rusia, 1973, pp. 165-172.
- [9] "Teoría de Mecanismos y Máquinas". En *Redactado por Frolov K.V.* Edición de MGTU del nombre N.E.Bauman, Moscú, Rusia, 2002, pp. 562-565.

ACE-X 2010. 8 y 9 de julio 2010, París, Francia.  
www.ace-x2010.com