

# Método moderno de control para un brazo mecatrónico

Salvador Saucedo-Flores

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,  
Unidad Zacatenco (ESIME Zacatenco),  
Instituto Politécnico Nacional.  
Miembro de la CSS del IEEE.  
MÉXICO.

Correo electrónico: [ssaucedo@ipn.mx](mailto:ssaucedo@ipn.mx)

Recibido el 31 de julio de 2008; aceptado el 21 de enero de 2009.

## 1. Resumen

Este trabajo presenta un nuevo tratamiento del control del movimiento de un manipulador subactuado conocido como acrobot. El espacio de movimiento es dividido en dos áreas: la de columpio y la de balanceo; diseñando leyes de control para cada una de ellas. Primero, se usa una ley de control basada en una función débil de control de Lyapunov (WCLF) para aumentar la energía y controlar la postura del eslabón actuado en el área de columpio. Después, un parámetro de la WCLF es escogido como una función del estado para prevenir singularidades. Luego, otro parámetro de la ley de control se ajusta de acuerdo al estado para mejorar el rendimiento del control. Al final, se diseña una ley de control para el área de balanceo. La estabilidad viene garantizada en el área de columpio mediante el uso de la WCLF basada en el principio de invariancia de LaSalle. Más aún, la estabilidad global se asegura combinando la WCLF y una función no plana de Lyapunov (NFLF).

**Palabras clave:** acrobot, principio de invariancia de LaSalle, función no plana de Lyapunov (NFLF), singularidad, estabilidad, under actuated manipulator, función débil de control de Lyapunov (WCLF).

## 2. Abstract

This paper presents a modern treatment of the motion control of an under actuated two-link manipulator, namely the acrobot. The motion gap is divided into two areas: swing-up and attractive; and control laws are designed for each. First, a

control law based on a weak-control Lyapunov function (WCLF) is employed to increase the energy of and control the stance of the actuated link in the swing back and forth area. After that, one parameter of the WCLF is chosen to be a nonlinear function of the state to prevent singularities. Then, another parameter of the control law is adjusted based on the state to improve the control performance. Lastly, an optimal control law is designed for the attractive area. Stability is guaranteed in the swing back and forth area by the use of a WCLF based on LaSalle's invariance principle. Moreover, the global stability of the control system is guaranteed by integrating the WCLF and a non flat Lyapunov function.

**Key words:** acrobot, La Salle's invariance principle, non flat Lyapunov function (NFLF), singularity, stabilization, under actuated manipulator, weak-control Lyapunov function (WCLF).

## 3. Introducción

El control de manipuladores mecánicos subactuados es un gran desafío en robótica e ingeniería de control. Los manipuladores subactuados de dos-eslabones, los cuales incluyen acrobots y pendubots, son ejemplos conocidos que han recibido una enorme atención en las últimas décadas. Los acrobots y los pendubots se mueven en un plano vertical. Para un acrobot, la unión en el hombro es pasiva, y la unión en el codo es actuada [1]; y viceversa para el pendubot [2]. El objetivo del control para ambos es impulsar al manipulador alejándolo de su posición vertical hacia abajo y balancearlo en su posición vertical hacia arriba. Ya que las uniones actuadas de los dos sistemas están en diferentes posiciones, los dos sistemas han sido usualmente tratados separadamente. Para sistemas no lineales complejos, es muy común en la práctica de control usar diferentes controladores para obtener objetivos locales y conmutar entre ellos cuando las condiciones cambian para conseguir objetivos de control globales [3]. Tal política ha sido también empleada en el control de manipuladores subactuados de dos eslabones [1], [3]. Con el fin de simplificar el procedimiento de diseño para el control del sistema, el espacio de movimiento es usualmente dividido en dos subespacios: el área de balanceo muy cerca de la posición vertical hacia arriba; y el área de columpio, la cual es el resto. Un número de métodos de control han sido derivados para cada área, *i.e.*, métodos basados en retro de

linealización parcial, dinámica cero, una función de Lyapunov, etc., han sido implementados para controlar el área de columpio [1], [3]-[6]; y métodos basados en un regulador lineal cuadrático, colocación de polos de lazo cerrado, control difuso, etc., han sido implementados para control del balanceo [7]-[9]. El objetivo del control en el área de columpio es inyectar suficiente energía en el manipulador para moverlo hacia el área de balanceo; y el objetivo del control en el área de balanceo es el estabilizar al manipulador en posición vertical hacia arriba.

Por otra parte, no es fácil mantener suave el movimiento cuando la ley de control es conmutada. Para resolver este problema, un método fue ideado para un pendubot [8]; y varios métodos fueron ideados para un acrobot [9]-[12]. Mientras esos métodos resuelven el problema de la conmutación, ellos crean otro problema, ello es, una singularidad. En [8], tal singularidad se evitó al hacer el valor de uno de los parámetros tan pequeño que la energía del pendubot no convergía a la energía potencial en la posición vertical hacia arriba; pero que tan pequeño ese parámetro debe ser es todavía una cuestión vigente. En [12], un parámetro de la ley de control fue hecho lo suficientemente grande para prevenir que el término en el denominador para el par de control se haga cero; pero los resultados de la simulación mostraron que el tiempo de asentamiento era muy grande.

Aunque numerosas investigaciones han sido realizadas sobre el control de manipuladores subactuados de dos-eslabones,

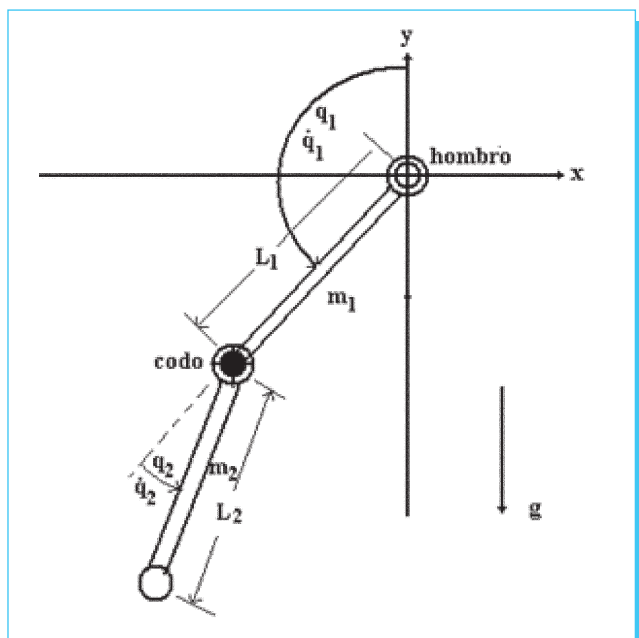


Fig. 1. Diagrama del acrobot. El codo es la unión actuada.

pocos han considerado la estabilidad global del sistema en el espacio total del movimiento; y ninguna teoría que abarcara ambos casos había sido intentada para un manipulador subactuado, hasta hace poco [13]. Un método de control fue presentado en [10] que garantiza la estabilidad global de un acrobot. En tal método, la singularidad fue simplemente evitada por división ulterior del área de columpio por dos subáreas. Tal enfoque es útil para evitar la singularidad; pero también implica ciertas desventajas, a saber, la división ulterior del área de columpio incrementa la complejidad de la ley de control y puede dificultar el hallar una ley de control que asegure la estabilidad global. En [14] se emplea retroalimentación dinámica para estabilizar el acrobot.

Este trabajo construye el modelo matemático del acrobot a través de la selección de un sistema de coordenadas apropiado. Se enfoca en su complejidad y presenta una estrategia basada en el control de la energía para él bajo una plataforma inteligente basada en múltiples clases de funciones de Lyapunov para afrontar el área de columpio y el control del balanceo. Ello garantiza la estabilidad global del manipulador en el área completa de movimiento. De entrada, el modelo matemático de un acrobot basado en una apropiada elección del sistema de coordenadas es presentado; y el espacio de movimiento se divide en áreas de columpio y de balanceo. Luego, una ley de control basada en una función débil de control de Lyapunov (WCLF) es diseñada para área de columpio para controlar la energía y el eslabón actuado de modo que haga que la energía del manipulador alcance la energía potencial en la posición vertical hacia arriba, y también para hacer que el ángulo y la velocidad angular del eslabón actuado se acerque a cero. La singularidad es evitada al introducir un parámetro que varía con el tiempo en la WCLF; y otro parámetro se introduce en la ley de control y es ajustado basándose en el estado para mejorar el rendimiento del control. La estabilidad del sistema de control en el área de columpio está garantizada por la WCLF. Entonces, un control óptimo se diseña para el área de balanceo. Finalmente, una función no plana de Lyapunov (NFLF) se emplea para garantizar la estabilidad después que el manipulador abandona el área de columpio. La estabilidad global es asegurada al integrar la WCLF y la NFLF. Los resultados de la simulación demuestran la utilidad de esta de esta propuesta.

#### 4. Dinámica del acrobot

La figura 1 ilustra el modelo de un acrobot, que se asemeja al pendubot. El subíndice 1 (o 2) representa los parámetros y variables relativos a la unión pasiva (o la actuada) y al eslabón adherido a tal unión, los cuales son como sigue ( $j = 1, 2$ ):

$q_j$  ángulo del  $j$ -ésimo eslabón relativo bien a la vertical cuando el eslabón se une con la base o bien relativo a la línea descrita por el eslabón frontal;

$q_j$  velocidad angular del  $j$ -ésimo eslabón;  
 $m_j$  masa del  $j$ -ésimo eslabón;  
 $L_j$  longitud de  $j$ -ésimo eslabón;  
 $L_{c_j}$  distancia desde  $j$ -ésima unión al centro de masa de  $j$ -ésimo eslabón;  
 $I_j$  momento de inercia de  $j$ -ésimo eslabón respecto de su centroide;  
 $T_j$  par aplicado a las uniones;  
 $g$  aceleración gravitacional.

La ecuación de Lagrange para el sistema produce la dinámica siguiente:

$$D(q)q + H(q, q) + \Phi(q) = T \quad (1)$$

Donde  $T = [T_1 \ T_2]^T = [0 \ T_2]^T$ ,  $D(q)$  es la matriz de inercia,  $H(q, q)$  es la amalgama de las fuerzas Coriolis y centrífuga, y  $\Phi(q)$  es el par por efecto de la gravedad. Se definen como:

$$D(q) = \begin{bmatrix} d_{11}(q) & d_{12}(q) \\ d_{11}(q) & d_{12}(q) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$H(q, q) = [h_1(q, q) \ h_2(q, q)]^T \quad (3)$$

$$\Phi(q) = [\phi_1(q) \ \phi_2(q)]^T \quad (4)$$

Notar que  $T_1 = 0$  impone una restricción no holonómica sobre el sistema. Las energías cinética, potencial, y total mecánicas del manipulador se escriben en coordenadas generalizadas como:

$$K(q, q) = 1/2 \ q^T D(q)q \quad (5)$$

$$U(q) = \sum_{j=1}^2 U_j(q) = \sum_{j=1}^2 m_j g l_j(q) \quad (6)$$

$$E(q, q) = K(q, q) + U(q) \quad (7)$$

Donde  $U_j(q)$  es la energía potencial y  $l_j(q)$  es la altura del centro de masa del  $j$ -ésimo eslabón ( $j = 1, 2$ ). Los parámetros en (2)-(6) están listados en el Apéndice A.

Asumiendo que  $x = [x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T = [q_1 \ q_2 \ \dot{q}_1 \ \dot{q}_2]^T$  y reescribiendo las dinámicas (1) en el estado espacio genera el siguiente modelo no lineal:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = f_1(x) + b_1(x)T_2 \\ \dot{x}_4 = f_2(x) + b_2(x)T_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

i.e.

$$\dot{x} = f_a(x) + b_a(x)T_2 \quad (9)$$

donde

$$\begin{bmatrix} f_a(x) = [x_3 \ x_4 \ f_1(x) \ f_2(x)]^T \\ b_a(x) = [0 \ 0 \ b_1(x) \ b_2(x)]^T \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = -D^{-1}(x)[H(x) \ \Phi(x)]^T \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \end{bmatrix} = D^{-1}(x) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(D)} \begin{bmatrix} -d_{21}(x) \\ d_{11}(x) \end{bmatrix} \quad (12)$$

y  $\det(D)$  es el determinante de la matriz cuadrada  $D(x)$ .

La ecuación (9) muestra que un manipulador subactuado de dos-eslabón es un sistema no lineal intrincado. Dividiendo el espacio de movimiento en dos partes se simplifica el diseño de la ley de control de estabilización. Sea el espacio completo de movimiento denotado por  $\Omega$  y definir el área de balanceo como

$$\Omega_2 : \begin{cases} |\text{mod}(q_1, 2\pi)| \leq \varepsilon_1 \\ |\text{mod}(q_1 + q_2, 2\pi)| \leq \varepsilon_2 \\ \text{norma} \begin{bmatrix} \varepsilon_3 & x_3 \\ \varepsilon_4 & x_4 \end{bmatrix} \leq \varepsilon_5 \\ x_3 x_4 \leq 0 \end{cases} \quad (13)$$

la que satisface

$$|E(x) - E_0| \leq \varepsilon_E \quad (14)$$

Donde  $\text{mod}(x, y)$  es el residuo de  $x$  dividido por  $y$ ;  $E_0$  es la energía potencial en la posición vertical superior;  $\text{norma}(x)$  es la norma euclidiana del vector  $x$ ;  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son números positivos reales;  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_4$  y  $\varepsilon_5$  son números no negativos real; y  $\varepsilon_E$  es un número positivo arbitrariamente pequeño. Por lo tanto, el área de columpio es:

$$\Omega_1 := \Omega - \Omega_2 \quad (15)$$

### 5. Estrategia de control para ambas regiones

Una buena combinación de energía y postura hace fácil el mover al manipulador desde el área de columpio hacia el área de balanceo. Una estrategia efectiva para obtener tal combinación es forzar que la energía del manipulador se aproxime a  $E_0$  durante el proceso de columpio, y al mismo tiempo, hacer que el estado del eslabón actuado se aproxime a cero.

### A. Estrategia de control para el área de columpio

Para lograr que el objetivo de control de moverse rápido desde el área de columpio hacia el área de balanceo, se selecciona la función débil de Lyapunov  $V_1(x)$  para diseñar la ley de control

$$V_1(x) = 1/2 \{ \alpha_1 E_x^2 + \alpha_2 x_2^2 + \beta(x)x_4^2 \} + \Delta \quad (16)$$

$$E_x = E(x) - E_0 \quad (17)$$

donde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\Delta$  son parámetros constantes positivos de diseño;  $\beta(x)$  es un parámetro de diseño positivo que varía en el tiempo; y  $E(x)$  está dado por (7). La elección de  $\Delta$  es importante para garantizar la estabilidad global del sistema de control y lo que es comentado en [4]. A partir de (5)-(7), la derivada en el tiempo de la energía total mecánica es

$$E(x) = x_4 T_2 \quad (17)$$

de donde, la derivada en el tiempo  $V_1(x)$  es

$$V_1(x) = [\alpha_2 x_2 + \beta(x)f_2'(x) + 0.5 \beta(x)x_4] x_4 + [\alpha_1 E_x + \beta(x)b_2(x)] x_4 T_2 \quad (19)$$

cuando

$$\alpha_1 E_x + \beta(x)b_2(x) \geq 0 \quad (20)$$

La ley de control en el área de columpio es elegida como

$$T_2 = - \frac{\alpha_2 x_2 + \beta(x)f_2'(x) + 0.5 \beta(x)x_4 + \gamma x_4}{\alpha_1 E_x + \beta(x)b_2(x)} \quad (21)$$

Donde  $\gamma > 0$  es un parámetro de diseño. Claramente, esta ley de control hace cierto que

$$V_1(x) = -\gamma x_4^2 < 0 \quad (22)$$

### B. Esquivando la singularidad

En la ley de control (21), dado que el segundo término del denominador de  $T_2$  es siempre mayor que cero, si los parámetros de diseño  $\alpha_1$  y  $\beta(x)$  no se eligen de modo adecuado, una singularidad puede pronto ocurrir cuando el primer término del denominador es menor que cero.

Por ello es esencial evitar dicha singularidad para prevenir una pérdida de control. Examinando al denominador de la ley de control (21), se deduce que una manera de hacerlo así debería ser elegir al parámetro  $\beta(x)$  tal que

$$\beta(x) > \alpha_1 |E_x| / b_{2\min} \quad (23)$$

Generalmente hablando, la elección de la constante  $\beta$  que satisface (23) hace que el denominador sea muy grande durante el periodo completo del proceso de columpio. Además, notar que, al comienzo del control del movimiento de columpio cuando la condición inicial es la posición de equilibrio hacia abajo,  $b_2(x)|_{t=0}$  es  $b_{2\max}$ . Por lo tanto, una constante  $\beta$  grande haría el denominador de  $T_2$  muy grande; y eso, a su vez, haría al par de control muy pequeño. Esto prevendría una respuesta rápida. De modo que se elige  $\beta(x)$  como

$$\beta(x) = \frac{\eta}{b_2(x)} \quad (24)$$

donde  $\eta > 2\alpha_1 E_0$  es una constante positiva. Consecuentemente

$$\alpha_1 E_x + \beta(x)b_2 > 0 \quad (25)$$

Eso asegura que la singularidad no se produzca. El parámetro  $\beta(x)$  es una función de  $b_2(x)$ , lo cual causa que el denominador en la ley de control (21) cambie de una manera propicia dentro de cierto rango durante el proceso completo de columpio. El hecho de que él tenga un valor adecuado al comienzo del movimiento provee al sistema con una respuesta rápida.

### C. Aumento del rendimiento del control en el área de columpio

A pesar que la estrategia del control recién visto evita la singularidad y produce un mejor transitorio en la respuesta que los previamente reportados, todavía se puede mejorar.

Substituyendo la ley de control (21) en (18) produce

$$E(x) = s_1(x) + \gamma s_2(x) \quad (26)$$

donde  $s_1(x)$  y  $s_2(x)$  son

$$s_1 = - \frac{\alpha_2 x_2 + \beta(x)f_2'(x) + 0.5 \beta(x)x_4}{\alpha_1 E_x + \beta(x)b_2(x)} x_4 \quad (26)$$

$$s_2 = - \frac{\gamma x_4^2}{\alpha_1 E_x + \beta(x)b_2(x)} \quad (27)$$

El valor y el signo de la primera parte,  $s_1(x)$ , cambia de acuerdo con tres cosas: el estado del sistema, el parámetro  $\beta(x)$ , y su derivada,  $d\beta(x)/dt$ . Del mismo modo, el valor de la segunda parte,  $s_2(x)$ , cambia con el estado del sistema y los parámetros  $\beta(x)$  y  $\gamma$ . A partir de (25), (28), y del hecho que  $\gamma > 0$ , es claro que el signo de  $s_2(x)$  permanece negativo. De ahí, cuando  $s_1(x)$  es

menor que cero, la ley de control del columpio (21) con (24) reduce la energía sin que importe el valor de  $\gamma$ . Para frenar la tasa de decrecimiento en la energía,  $\gamma$  debería ser tan pequeño como sea posible. Por otro lado, cuando  $s_1(x)$  es mayor que cero, un  $\gamma$  pequeño conduce hacia un  $s_2(x)$  pequeño. Esto rápidamente incrementa la energía del sistema, y puede causar que él exceda  $E_0$  por mucho. Por ello, una elección inadecuada de  $\gamma$  puede dar lugar a indeseables oscilaciones en el par de control. Consecuentemente, es difícil para la ley de control (21) producir un satisfactoria respuesta cuando  $\gamma$  es constante. Esto es, para mejorar el rendimiento, es esencial que  $\gamma$  se adapte a los cambios en el estado del sistema. Basados en la reciente discusión, se elige que  $\gamma$  sea la siguiente función no lineal del estado, en lugar de una constante:

$$\gamma(x) = \gamma_0 E_\varepsilon(x) \quad (29)$$

donde  $\gamma_0 > 0$  es una constante y  $E_\varepsilon(x)$  se define como

$$E_\varepsilon(x) = E(x) + E_0 + \varepsilon \quad (30)$$

donde  $\varepsilon$  es una constante positiva pequeña que garantiza que  $E_\varepsilon(x) > 0$ . Esta estrategia garantiza que  $\gamma(x)$  monótonamente se incremente con la energía y prevenga cambios abruptos en la energía del sistema. De acuerdo a la elección de  $\gamma_0$  en (41), un valor pequeño resulta en un sobretiro grande en la energía; y uno grande hace que el tiempo de asentamiento (el tiempo necesario para que la energía alcance  $E_0$ ) muy largo.

La elección (24) evita singularidades en la ley de control (21) para manipuladores de dos-eslabones y garantiza que la función de Lyapunov  $V_1(x)$  converja a cero. En [13] se demuestra que la energía del manipulador converge a  $E_0$ , y que el ángulo y la velocidad angular del eslabón actuado convergen ambos a cero. Para un acrobot, esto asegura que el eslabón actuado se gira naturalmente, y que los dos eslabones se mueven juntos en una órbita periódica circular que contiene la posición vertical hacia arriba. Como resultado, el manipulador se mueve con facilidad hacia el área de balanceo.

#### D. Estrategia de control para el área de balanceo

La ley de control (21) para el área de columpio garantiza que el manipulador se mueva hacia el área de balanceo,  $\Omega_2$ , punto en el cual el controlador de balanceo se activa. Este último se diseña basándose en control óptimo usando el siguiente modelo de aproximación lineal cerca de la posición vertical hacia arriba:

$$\dot{x} = Ax + BT_2 \quad (31)$$

La segunda función de Lyapunov  $V_2(x)$  se define como

$$V_2(x) = x^T P x \quad (32)$$

En (32)  $P = P^T > 0$  es la solución de la ecuación algebraica de Riccati

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (33)$$

donde  $Q \geq 0$ ,  $R > 0$ , y  $(Q^{1/2}, A)$  es observable. Al resolver (33) se obtiene la ley óptima de control

$$C_2 : T_2 = -Gx, \quad \text{donde } G = R^{-1}B^T P \quad (34)$$

esto garantiza que  $V_2(x) < 0$ , para todo  $x$  en  $R^4 \setminus \{0\}$  en el área de balanceo y, por lo tanto, garantiza la convergencia del movimiento del manipulador hacia la posición vertical hacia arriba.

#### 6. Ejemplo numérico y comentarios

Los parámetros para el área de balanceo del acrobot se eligieron como

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \pi/6.6, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0.1, \quad \varepsilon_5 = 10, \quad \varepsilon_E = 1.0 \text{ J} \quad (35)$$

Los parámetros del acrobot en el 'Apéndice B' se usaron en la simulación (Tabla II).

*Comentario 1:*  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son dos parámetros importantes que definen el área de balanceo. Notar que el modelo lineal aproximado (31) se emplea en esta área, y tal modelo se obtiene al usar las aproximaciones  $\sin(x_1) \approx x_1$  y  $\sin(x_1 + x_2) \approx x_1 + x_2$  en el modelo no lineal (9). Puesto que  $\sin(\pi/6) = 0.5001$  y  $\pi/6 = 0.5236$ , hablando prácticamente,  $\sin \xi \approx \xi$  es casi cierto para  $0 \leq |\xi| < \pi/6.6$ .

Por ello,  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  deben ser menores que  $\pi/6.6$ . Mientras que una elección razonable de  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  asegura la convergencia del movimiento cuando la ley de control (34) es usada en el área de balanceo, es difícil la captura del manipulador en dicha área si los dos parámetros son demasiado pequeños. En suma, la ley de control (34) no puede garantizar la convergencia del movimiento en el área de balanceo si esos parámetros son muy grandes debido a que la aproximación al modelo lineal no describe precisamente al movimiento del manipulador en tal caso.

#### A. Ejemplo numérico

*Resultados de la simulación para el acrobot:* Los parámetros de la ley de control (21), (24), (29), y (30) se eligieron como

$\alpha_1 = 0.5$ ,  $\alpha_2 = 30$ ,  $\eta = 18.6$ ,  $\gamma_0 = 1.4$ ,  $\varepsilon = 0.5$ , y  $E_0 = 16.2$  J. Un regulador lineal cuadrático fue diseñado usando las matrices positivas definidas de ponderación

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix} \quad \text{y } R = 5$$

Tales valores arrojaron la ley de control de retro del estado:

$$G = [-190.49, -74.36, -73.58, -34.12] \quad (36)$$

El estado inicial fue  $x(0) = [\pi \ 0 \ 0 \ 0]^T$ . El comando **linmod** se usó para calcular las matrices  $A$  y  $B$  del modelo lineal. El comando **care** se empleó para resolver (33). La figura 2 exhibe el resultado de la simulación para el control global del acrobot.

La ley de control fue conmutada en el instante  $t = 8.31$  s. Como se predijo, los dos controladores controlaron adecuadamente al acrobot e hicieron que él convergiera suavemente a la posición vertical superior. La comparación de los resultados para el pendubot en [8] y el acrobot revela que, aunque se use

la misma estrategia de control para ambos y con prudencia se ajusten los parámetros de control, los resultados son bastante diferentes. En particular, el tiempo de asentamiento es mucho más extenso para el acrobot que, por instancia, el pendubot. Esto dice que el control del movimiento es mucho más difícil para un acrobot que para un pendubot.

### B. Otros comentarios

Los resultados de la simulación (Fig. 2) demuestran la efectividad del tratamiento del control de movimiento de un acrobot, que emplea una WCLF y una NFLF. Uno de los puntos clave del método es que, a diferencia de la mayoría de los métodos existentes, la ley de control se ajusta no sólo a la energía sino también la postura del manipulador en el área de columpio. Ello asegura que el eslabón actuado rota en una manera natural mientras la energía se incrementa. Por tanto, en contraste con estrategias de control que usan retroalimentación con linealización parcial para columpiar al manipulador y un regulador lineal cuadrático para balancearlo ([1], [2]), y una estrategia de control difusa que combina controladores modelo libre y difuso basado en modelo para controlar los movimientos de columpio y de balanceo [11], la estrategia presentada en

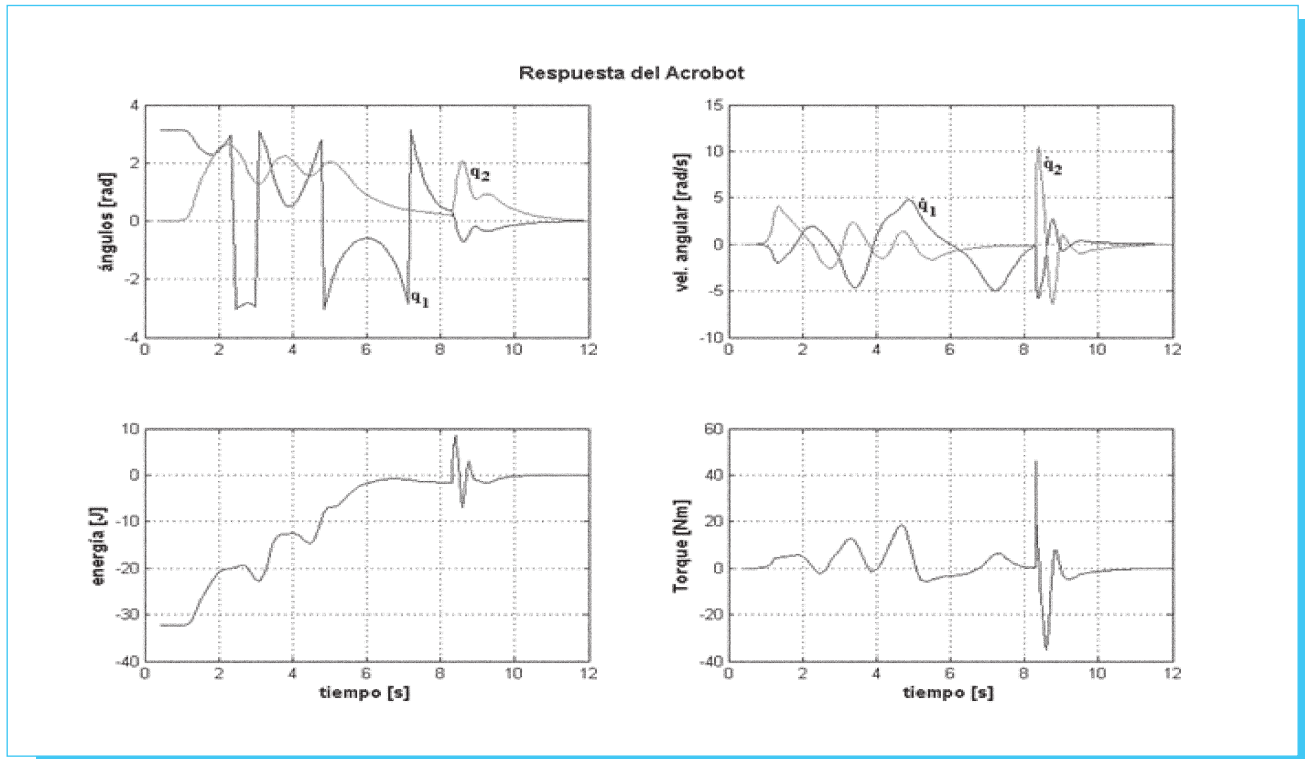


Fig. 2. Resultados globales del control para el acrobot.

este documento facilita la captura del manipulador en el área de balanceo y fácil el mantener el movimiento suave cuando la ley de control es conmutada.

Una sorpresa en la respuesta en el área de balanceo fue que las curvas abandonan momentáneamente la región 2 pero ellas eventualmente convergen a cero, como la figura 2 sugiere. El software MATLAB/Simulink fue extensamente usado.

## 7. Conclusiones

Este reporte describe una estrategia moderna de control para manipuladores subactuados de dos-eslabones y presente leyes de control que fueron diseñados basándose en una WCLF y una NFLF. Una ley de control basada en una WCLF fue diseñada para control del movimiento en el área de columpio. Se ha probado que el eslabón actuado converge a la posición vertical superior mientras que el eslabón pasivo converge a una órbita periódica circular conteniendo la posición inestable vertical superior de equilibrio. La WCLF contiene una función no lineal del estado como una variable para eliminar el problema de las singularidades y para asegurar una respuesta rápida. Para mejorar el rendimiento del control, un parámetro en la ley de control del columpio fue hecho sensible al estado, y en particular, a la tasa de cambio en la energía mecánica del sistema. La estabilidad en el área de columpio fue analizada basándose en la WCLF; y la estabilidad global del sistema de control es garantizada por la NFLF. Resultados de la simulación demuestran la validez de este método. Las ideas en las cuales este método se basa pueden fácilmente ser extendidas para manipuladores con tres eslabones y también ser aplicado al control de otros sistemas no lineales.

## 8. Referencias

- [1] M. W. Spong, <<The swing up control problem for the acrobot>>, IEEE Control Syst. Mag., vol. 15, no. 1, Feb. 1995, pp. 49-55.
- [2] Sankaranarayanan, V.; Mahindrakar, A. D. <<Control of a Class of Underactuated Mechanical Systems Using Sliding Modes>>. Robotics, IEEE Trans on Volumen 25, Issue 2, Abril 2009 pp. 459 - 467
- [3] A. Inoue, M. Deng, S. Hara, y T. Henmi, <<Swing-up and stabilizing control system design for an Acrobot>>, en Proc. IEEE Int. Conf. Netw., Sens. Control, 2007, pp. 559-561.
- [4] T. Henmi, M. Deng, y A. Inoue, <<Swing-up control of the acrobot using a new partial linearization controller based on the Lyapunov theorem>>, en Proc. IEEE Int. Conf. Netw., Sens. Control, 2006, pp. 60-65.

- [5] Z. Ji, L. Wang, y X. Guo, <<On controllability of switched linear systems>>, IEEE Trans. Autom. Control, vol. 53, no. 3, Abril 2008, pp. 796-801.
- [6] S. C. Brown and K. M. Passino, <<Intelligent control for an Acrobot>>, J. Intell. Robot. Syst., vol. 18, no. 3, Mar. 1997, pp. 209-248.
- [7] X.-Z. Lai, J.-H. She, Y. Ohyama, y Z. Cai, <<Fuzzy control strategy for Acrobots combining model-free and model-based control>>, Proc. Inst. Elect. Eng.-Control Theory Appl., vol. 146, no. 6, Nov. 1999, pp. 505-511.
- [8] I. Fantoni, R. Lozano, and M. W. Spong, <<Energy based control of the Pendubot>>, IEEE Trans. Autom. Control, vol. 45, no. 4, Abril 2000, pp. 725-729.
- [9] X. Xin y M. Kaneda, <<Analysis of the energy-based swing-up control of the Acrobot>>, Int. J. Robust Nonlinear Control, vol. 17, no. 16, pp. 1503-1524, 2007.
- [10] E. D. Sontag y H. J. Sussmann, <<Time-optimal control of manipulators>>, in Proceedings of IEEE International Conference on Robotics & Automation, 1986, pp. 1692-1697.
- [11] X. Xin y M. Kaneda, <<The swing up control for the Acrobot based on energy control approach>>, in Proc. 41st IEEE Conf. Decision Control, 2002, pp. 3261-3266.
- [12] X.-Z. Lai, M. Wu, y J.-H. She, <<Control of acrobot based on Lyapunov function>>, J. Central South Univ. Technol., vol. 11, no. 2, Junio 2004, pp. 210-215.
- [13] X. Z. Lai, J. H. She, S. X. Yang y Min Wu <<Comprehensive Unified Control Strategy for Underactuated Manipulator>>, IEEE Tans on SMC-B, Abril 2009, pp. 389-398.
- [14] J. C. Geromel, P. Colaneri, y P. Bolzern, <<Dynamic output feedback control of switched linear systems>>, IEEE Trans. Autom. Control, vol. 53, no. 3, Abril 2008, pp. 720-733.

## Apéndice A. Parámetros del acrobot para (2)-(6)

Parámetro	Expresión	Uso específico
$l_1(q)$	$L_{e1} \cos q_1$	energía potencial
$l_2(q)$	$L_{e2} \cos (q_1 + q_2) + L_{e2} \cos q_1$	
$\theta_1$	$m_1 L_{e1}^2 + I_1 + m_2 L_1^2$	matriz de inercia
$\theta_2$	$m_2 L_{e2}^2 + I_2$	
$\theta_3$	$m_2 L_1 L_{e2}$	coriolis y centrífuga
$\theta_4$	$(m_1 L_{e1} + m_2 L_1)g$	atracción de la
$\theta_5$	$m_2 L_{e2} g$	gravedad
$\phi_1(q)$	$-\theta_4 \sin q_1 - \theta_5 \sin (q_1 + q_2)$	atracción de la
$\phi_2(q)$	$-\theta_5 \sin (q_1 + q_2)$	gravedad

Apéndice A (continúa)

Parámetro	Expresión	Uso específico
$d_{11}(q)$	$\theta_1 + \theta_2 + 2\theta_3 \cos q_2$	matriz de inercia
$d_{12}(q)$	$\theta_2 + \theta_3 \cos q_2$	
$d_{21}(q)$	$\theta_2$	
$d_{22}(q)$	$\theta_2$	
$h_1(q,q)$	$-\theta_3(2q_1q_2 + q_2^2) \sin q_2$	coriolis y centrífuga
$h_2(q,q)$	$\theta_3 q_1^2 \sin q_2$	

Apéndice B. Parámetros físicos del acrobot y matrices del área de balanceo.

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 0.92 \text{ kg} & m_2 &= 0.80 \text{ kg} \\
 I_1 &= 5.33e-2 \text{ kgm}^2 & I_2 &= 0.21 \text{ kgm}^2 \\
 L_1 &= 0.8 \text{ m} & L_2 &= 1.6 \text{ m} \\
 L_{c1} &= 0.4 \text{ m} & L_{c2} &= 0.8 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Matrices que genera el comando **linmod**

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15.56 & -12.74 & 0 & 0 \\ -17.89 & 30.47 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -4.89 \\ 9.75 \end{bmatrix}$$

# INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

## SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

### ESCUELA SUPERIOR DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

### SECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO E INVESTIGACIÓN

## XI CNIES CONGRESO NACIONAL DE INGENIERÍA ELECTROMECAÁNICA Y DE SISTEMAS

MÉXICO, NOVIEMBRE, 2009.