

# Generación uniforme de usuarios en celdas hexagonales para simulaciones de sistemas celulares

Giselle M. Galván-Tejada

Sección de Comunicaciones,  
Departamento de Ingeniería Eléctrica,  
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.  
Av. IPN 2508, Col. San Pedro Zacatenco,  
C.P. 07360, México DF.  
MÉXICO.

Teléfono: 5747 3800, ext. 3767

correo electrónico: ggalvan@cinvestav.mx

Recibido el 8 de febrero de 2007; aceptado el 19 de octubre de 2007.

## 1. Resumen

La simulación en computadora es una herramienta importante y útil en la predicción del comportamiento de algún sistema en particular, tanto en la etapa de planeación, como en etapas posteriores para proponer posibles mejoras. En los sistemas de comunicaciones con estructura celular, la generación de usuarios y el control de tráfico es un aspecto básico, por lo que al respecto desde hace varios años se han reportado en la literatura modelos de simulación para este problema, considerando que los usuarios tienen una distribución geográfica uniforme. Sin embargo, hasta el mejor de los conocimientos, no se ha expuesto aún algún mecanismo para tratar el problema de generación geográficamente uniforme de usuarios en áreas hexagonales, por lo que el problema sigue actual para los sistemas celulares de comunicaciones inalámbricas. Así, en este artículo se presenta un algoritmo sencillo para simular tráfico cuyos usuarios sigan una distribución uniforme dentro de celdas hexagonales consideradas generalmente en las simulaciones de sistemas celulares actuales y de tercera generación (3G) y el cual puede aplicarse también a los nuevos sistemas de telefonía local inalámbrica y en general a redes inalámbricas que presenten una estructura de celdas hexagonales.

**Palabras clave:** Tráfico uniforme, simulación, sistemas celulares, celdas hexagonales, sistemas de radiocomunicación, usuarios uniformes, 3G, telefonía local inalámbrica, sistemas terrestres, FWA, WiMAX, redes inalámbricas.

## 2. Abstract (Uniform Generation of Users in Hexagonal Cells for Cellular Systems Simulations)

Simulations are useful both for predictions and for modifications over a particular system. In the particular case of cellular wireless communications, a fundamental aspect is the generation of subscribers within a certain configuration. From a traffic point of view, several publications have been reported in the open literature. However, the generation of a uniform distribution of subscribers (geographically speaking) has been assumed known. Thus, a simple algorithm to simulate a uniform distribution of users in hexagonal cells is presented in this paper. This type of cells usually are considered in the current and third generation (3G) cellular systems and which can be applied to the new fixed wireless access systems and in general to any wireless network that presents an hexagonal cell structure.

**Key words:** uniform traffic, simulation, cellular systems, hexagonal cells, radiocommunication systems, uniform users, 3G, terrestrial systems, FWA, WiMAX, wireless networks.

## 3. Introducción

En el tiempo actual donde los modernos sistemas de telecomunicaciones proveen de una amplia gama de servicios fijos y móviles como: Internet, correo electrónico, voz, video en demanda, datos a alta velocidad, fax, etc. y, además, en diversos ambientes como terrestres, marítimos, espaciales, urbanos, suburbanos, rurales, interiores, exteriores, etc., es imprescindible el uso de algún mecanismo automatizado de diseño y predicción del desempeño del sistema que se esté proponiendo y analizando. Para lograr este fin, tanto operadores como investigadores recurren a la simulación por computadora como una herramienta poderosa para la evaluación del desempeño del sistema en cuestión sometido a diferentes condiciones. De esta forma se tiene un medio

eficiente para optimizar el desempeño de las redes de comunicaciones cada día más complejas.

En particular las redes celulares de sistemas móviles y los recientes sistemas de telefonía local inalámbrica (Fixed Wireless Access, FWA) de primera generación y de banda ancha (conocidos como WiMAX fijo), que son un hecho [1], generalmente se modelan bajo una estructura de celdas hexagonales, las cuales se analizan y discuten en [2]. A partir de entonces prácticamente todos los análisis teóricos suponen tal estructura; aunque hay estudios con celdas cuadradas o circulares con el propósito de simplificar el análisis del sistema. Es importante señalar que a pesar que las celdas hexagonales presentan ciertas particularidades atractivas, estrictamente hablando no se tiene tal forma geométrica en la práctica, sino que la forma de la celda depende de los patrones de radiación de las antenas que se usan en las estaciones base, de la frecuencia de operación y de las obstrucciones que se encuentren en la trayectoria de propagación. No obstante, dado que el hexágono es la representación más adecuada de las celdas [2], conviene mantenerla para llevar a cabo las simulaciones, en donde un aspecto básico es la generación estocástica de usuarios con cierta distribución espacial. Al respecto, la mayoría de los trabajos suponen una distribución geográfica uniforme de usuarios dentro de celdas hexagonales. Sin embargo, hasta el mejor de nuestro conocimiento, no se encuentra en la literatura abierta la descripción explícita del algoritmo a seguir para simular usuarios bajo estas condiciones. Motivado por lo anterior, se decidió desarrollar un algoritmo, que ha sido usado en diferentes simulaciones de eventos discretos de sistemas inalámbricos con estructura de celdas hexagonales. Concretamente, la idea es presentar los pasos de este algoritmo que resulta fácil de programar y cumple con la distribución que se busca. Así, el resto del artículo está organizado como sigue: en la Sección 4 se resume algunos aspectos concernientes a la generación de llamadas en una estructura con celdas hexagonales; en la sección 5 se explica el algoritmo propuesto para la generación espacial uniforme de llamadas y las razones por las cuales los usuarios generados se distribuyen de manera uniforme; algunos ejemplos del algoritmo se presentan en la sección 6; finalmente las principales conclusiones se destacan en la sección 7.

#### 4. Generación de llamadas en estructuras celulares

A lo largo de veinte años de la telefonía móvil celular se ha hecho una basta cantidad de análisis basados en simulaciones, donde se considera la generación de llamadas dentro de la red bajo estudio. Existen dos aspectos básicos relacionados con las simulaciones de eventos discretos para la evaluación de la capacidad del sistema obtenida por simulación. Por una parte, la generación estocástica de los arribos y duración de las

llamadas y por otra, la generación estocástica de tales llamadas de forma geográfica. La primera generación de llamadas es lo que propiamente se conoce como generación de tráfico y en donde se tiene la situación clásica que los arribos de las llamadas siguen una distribución de probabilidad Poisson y una distribución exponencial negativa entre arribos de llamadas, ambas con sus correspondientes parámetros (ver por ejemplo [3-4]). La generación de llamadas de manera espacial o geográfica se ha supuesto tanto con una distribución uniforme como con una no uniforme [5-9]. Se ha estudiado también la movilidad de los usuarios en carreteras de alta velocidad y su impacto en el sistema [10-11].

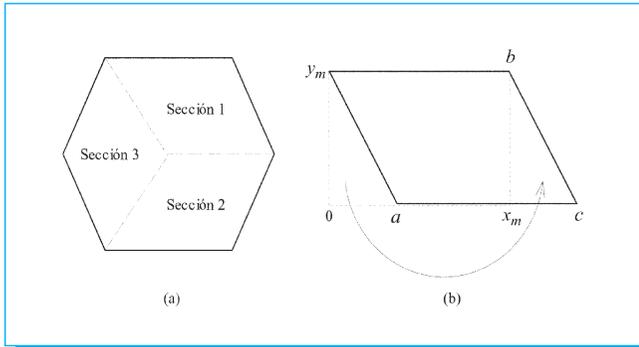
El objetivo del presente artículo es la generación uniforme de usuarios o llamadas de forma espacial dentro de una estructura de celdas hexagonales. Como se mencionó en la introducción, hasta el mejor de nuestro conocimiento, no se ha reportado en la literatura abierta algoritmos para la generación de usuarios distribuidos uniformemente en un hexágono, y en la mayoría de las publicaciones simplemente se encuentran expresiones como "se generaron usuarios uniformes en la celda" sin hacer explícito cómo se hizo. Una primera aproximación sería generar usuarios uniformemente distribuidos en un rectángulo que abarcará toda el área de servicio (o si bien se tratara de una celda única, un rectángulo alrededor de ésta) y descartar y repetir las llamadas que cayeran fuera del área de hexágonos. Sin embargo, es sabido que las simulaciones de eventos discretos consumen tiempo y la generación de miles de llamadas debe hacerse lo más eficiente que sea posible. No es objetivo de este artículo mostrar la complejidad y eficiencia computacional de posibles algoritmos de generación de llamadas, sino más bien, describir un posible algoritmo sencillo donde todos los usuarios que se generen sean usados en simulaciones con propósitos de la evaluación del desempeño de un sistema con estructura celular.

### 5. Algoritmo propuesto

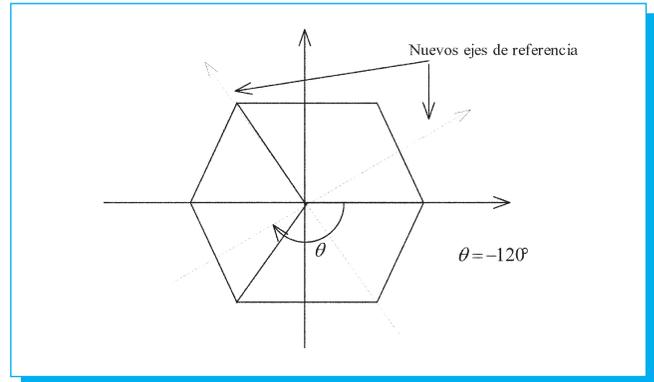
#### A. Descripción del algoritmo

Bajo la premisa que se tiene una red celular con  $N$  celdas hexagonales, de las cuales se conoce a priori su posición central y su radio  $R$ , el algoritmo propuesto consiste de los siguientes pasos:

1. Generación de una variable aleatoria discreta uniformemente distribuida entre 1 y  $N$ . Con esto se selecciona determinada celda.
2. Generación de una variable aleatoria discreta uniformemente distribuida entre 1 y 3 de tal forma que se seleccione un sector<sup>1</sup> (o una sección, véase figura 1a) de la celda hexagonal que haya resultado en (1).



**Fig. 1.** Geometría usada para generar tráfico uniforme dentro de una celda hexagonal. (a) División de la celda en secciones; (b) Mapeo de usuarios del triángulo  $0ay_m$  al triángulo  $x_mcb$ .



**Fig. 2.** Ejes de referencia usados para localizar usuarios en el sector 3.

3. Generación de dos variables aleatorias uniformemente distribuidas, una digamos  $x$ , entre 0 y  $x_m$  y la otra, digamos  $y$ , entre 0 y  $y_m$  (i.e. los usuarios<sup>2</sup> se están distribuyendo uniformemente en el rectángulo  $0x_my_m$ ). Naturalmente esto se hace para el sector o sección determinada en el paso (2).
4. Todos los usuarios que estén dentro del triángulo  $0ay_m$  se mapean al triángulo  $bcx_m$  (como se muestra en la figura 1b).

De la geometría hexagonal, con celda de radio  $R$ , fácilmente se pueden derivar las siguientes expresiones:

$$x_m = R \tag{1}$$

$$y_m = \frac{\sqrt{3}}{2}R \tag{2}$$

$$a = \frac{R}{2} \tag{3}$$

A continuación se describirá con mayor detalle cómo un usuario puede localizarse dentro de alguna sección o sector dado. Tomando como ejemplo la sección 1 (es importante observar que las secciones 1 y 2 son un espejo una de la otra, tal que todas las expresiones serán igualmente aplicables excepto la correspondiente a la posición  $y$ , en cuyo caso se debe añadir un signo negativo), se tiene que la recta  $ay_m$  está dada por la ecuación

<sup>1</sup>Al mencionar sectores en este paso del algoritmo, es importante resaltar que esto no implica que se trate de celdas sectorizadas y que el algoritmo esté restringido a tal configuración de celdas. La sectorización en este contexto solo se hace para proveer de un mecanismo de tener tráfico uniforme en toda la celda).

<sup>2</sup>(Equivalentemente se podría hacer referencia a llamadas en lugar de usuarios, solo que aquí se pretende enfatizar la generación de tráfico (o usuarios) uniforme de forma geográfica.)

$$y = -\frac{y_m}{a}x + y_m \tag{4}$$

Por lo tanto, si  $x < a$  y además  $y < -\frac{y_m}{a}x + y_m$

entonces la posición del usuario se mapea al triángulo  $bcx_m$  por medio de la transformación  $x = x_m + x$ .

En el caso de la sección 3, es necesario tomar un nuevo par de ejes de referencia. Esto se detalla en la figura 2.

Así, de la figura 2,

$$\begin{aligned} x_3 &= x \cos \theta + y \sin \theta \\ y_3 &= -x \sin \theta + y \cos \theta \end{aligned} \tag{5}$$

donde  $x_3$  y  $y_3$  se aplica para las correspondientes posiciones  $x$  y  $y$  rotadas en la sección 3.

### B. Distribución de usuarios generados por el algoritmo

A partir de los pasos del algoritmo, es fácil observar que éste está basado fundamentalmente en dos aspectos clave: la división de tres sectores con dimensiones iguales (los cuales se seleccionan a partir de una variable aleatoria uniforme) y la generación de usuarios dentro de ese sector a partir de un rectángulo parcialmente inmerso en tal sector (como se muestra en la figura 1b), los cuales se distribuyen también de forma uniforme. En este último caso, dado que los usuarios correspondientes al triángulo  $0ay_m$  tienen una distribución uniforme y son mapeados al triángulo  $x_mcb$  dentro del hexágono, heurísticamente se puede afirmar que las llamadas dentro de

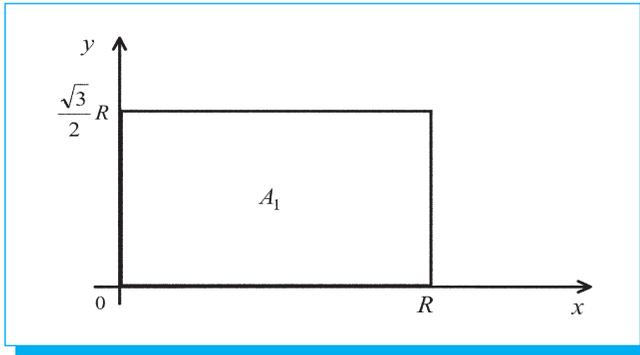


Fig. 3. Espacio XY.

todo el hexágono siguen una distribución uniforme. Para demostrar esta sentencia se procede con el siguiente desarrollo.

Sea  $A_1$  el área correspondiente al rectángulo dentro del espacio XY como se muestra en la figura 3. Obsérvese que dicho rectángulo proviene de la generación uniforme de usuarios del paso 3 del algoritmo propuesto.

Entonces la función de densidad de probabilidad (pdf) conjunta para  $A_1$  es bien conocida como uniforme en XY y sencillamente está dada por:

$$f_{xy}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3} R^2} & ; 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2} R \\ 0 & ; \text{otro} \end{cases} \quad (6)$$

Sea  $A_2$  el área correspondiente al paralelogramo dentro del nuevo espacio WZ el cual se muestra en la figura 4.

Entonces se busca demostrar que a partir del mapeo del rectángulo de la figura 3 al paralelogramo de la figura 4, la pdf

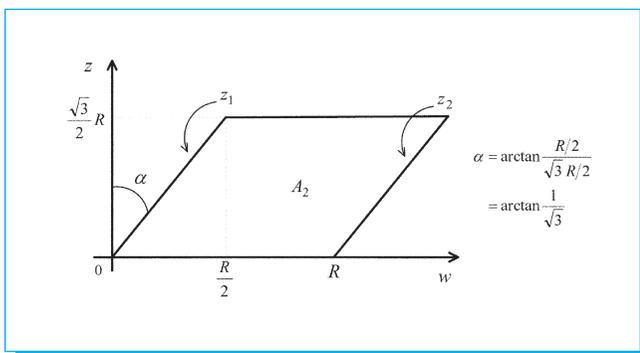


Fig. 4. Nuevo espacio WZ.

conjunta en el nuevo espacio WZ es también uniforme. Vale la pena señalar que este paralelogramo corresponde a cualquiera de los sectores dentro del hexágono, por lo que la demostración que se haga sobre éste es igualmente válida para cualquiera de los otros sectores.

Partiendo de la premisa que sólo las rectas  $0y_m$  y  $bx_m$  de la figura 1b sufren una deformación al ser mapeadas al nuevo espacio WZ (la recta  $by_m$  es solo recorrida), entonces es necesario definir las rectas  $z_1$  y  $z_2$  que limitan el área  $A_2$ . De la figura 4 es fácil deducir que la pendiente de ambas rectas es  $\mu = 3$  y que por lo tanto:

$$z_1 = \sqrt{3} w \quad (7)$$

Ahora, para  $z_2$  es necesario determinar la ordenada al origen. De la geometría de la figura 5 se tiene que  $b_2 = \sqrt{3} R$  por lo que

$$z_2 = \sqrt{3} (w - R) \quad (8)$$

Así, el área  $A_2$  está acotada por

$$z/\sqrt{3} \leq w \leq z/\sqrt{3} + R, 0 \leq z \leq \sqrt{3}/2 R,$$

Entonces, para  $A_1$

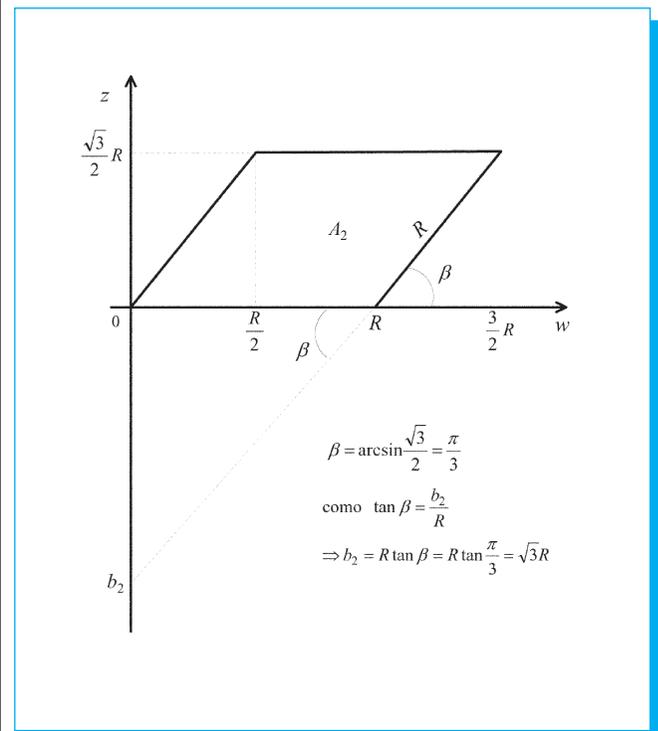


Fig. 5. Geometría usada para determinar  $b_2$ .

$$0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{2} R \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq R \quad (8)$$

mientras que para  $A_2$

$$0 \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2} R \quad \text{para} \quad \frac{z}{\sqrt{3}} \leq w \leq \frac{z}{\sqrt{3}} + R \quad (9)$$

se puede obtener la correspondencia de  $y$  a  $z$  y de  $x$  a  $w$  como se muestra en la tabla 1. Obsérvese que para el mapeo de  $y$  a  $z$ , la correspondencia es uno a uno, *i.e.*, cuando  $y$  toma un valor (cero ó  $\sqrt{3}/2R$ ),  $z$  toma uno y solo un valor también, mientras que el mapeo de  $x$  a  $w$  no lo es; por ejemplo, si  $x = 0$ ,  $w = 0$  ó  $w = R/2$ .

Por lo anterior, la transformación del espacio  $XY$  al espacio  $WZ$  estaría dada por las siguientes ecuaciones:

$$w = f(x,y) = x + y \sqrt{3} \quad (10)$$

$$z = f(y) = y \quad (11)$$

A partir de la transformación dada en las ecuaciones (10) y (11), se tiene que la pdf conjunta del espacio  $WZ$  está dada por [12]

$$f_{wz}(w,z) = \frac{f_{xy}(x,y)}{|J(x,y)|} \quad (12)$$

donde

$$J(x,y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (13)$$

es el Jacobiano de la transformación (10) y (11), el cual para el caso bajo análisis,  $J(x,y) = 1$ . Entonces, de este resultado y de la ecuación (6), se tiene que

**Tabla 1.** Correspondencia entre los planos  $XY$  y  $WZ$ .

$x$	$y$	$w$	$z$
0	0	0	0
0	$\sqrt{3}/2 R$	$R/2$	$\sqrt{3}/2 R$
$R$	0	$R$	0
$R$	$\sqrt{3}/2 R$	$3/2 R$	$\sqrt{3}/2 R$

$$f_{wz}(w,z) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3} R^2} ; \frac{z}{\sqrt{3}} \leq w \leq \frac{z}{\sqrt{3}} + R, 0 \leq z \leq \frac{\sqrt{3}}{2} R \\ 0 ; \text{ otro} \end{cases} \quad (14)$$

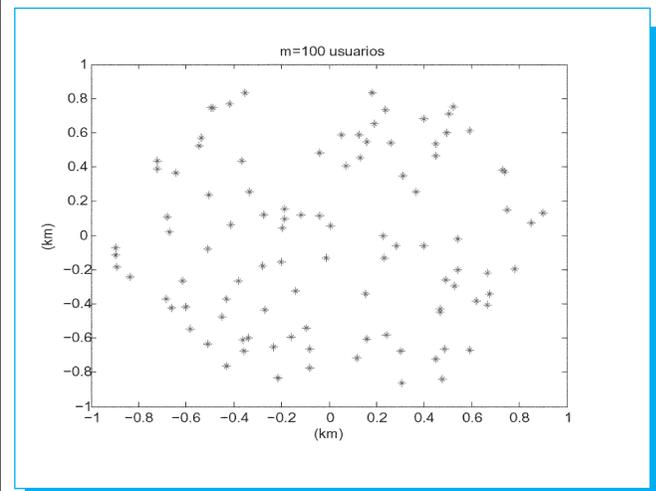
La cual es constante dentro del área  $A_2$  y cero fuera de ésta, por lo cual (14) corresponde a la bien conocida definición de una pdf uniforme.

### 6. Ejemplos

A continuación se presentan algunos ejemplos del algoritmo desarrollado en la sección 5. Dado que lo que se busca es observar la distribución uniforme de usuarios en celdas hexagonales, las cuales son independientes por la selección aleatoria de las  $N$  celdas involucradas en la red, es suficiente tomar una sola celda. Así se corrieron diferentes simulaciones variando el número de usuarios, digamos  $m$ , dentro de la celda. Sin pérdida de generalidad, se consideró en todas las situaciones un radio de celda de 1 km.

En las figuras 6 y 7 se muestran los resultados obtenidos para  $m = 100$  y  $m = 200$ , respectivamente. Como se puede observar hay varios puntos dispersos (los cuales representan a los usuarios) que todavía no definen claramente un hexágono.

En las figuras 8 y 9 se muestran los resultados correspondientes a  $m=500$  y  $m=1000$ , respectivamente. En ambas figuras es notorio cómo los usuarios comienzan a distribuirse uniformemente dentro de un área hexagonal como se esperaba.



**Fig. 6.** Generación de  $m = 100$  usuarios.

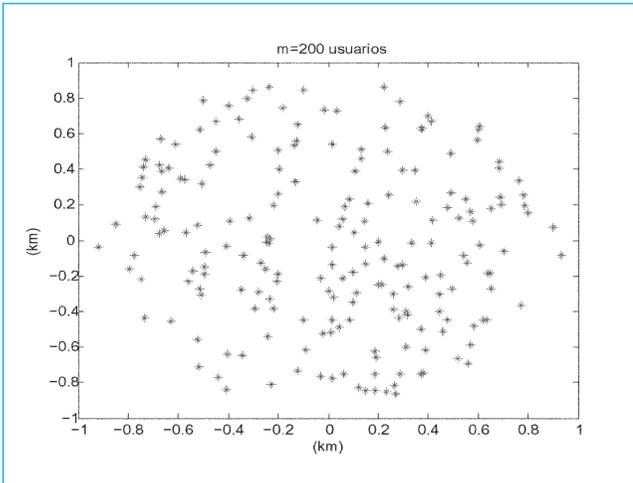


Fig. 7. Generación de  $m = 200$  usuarios.

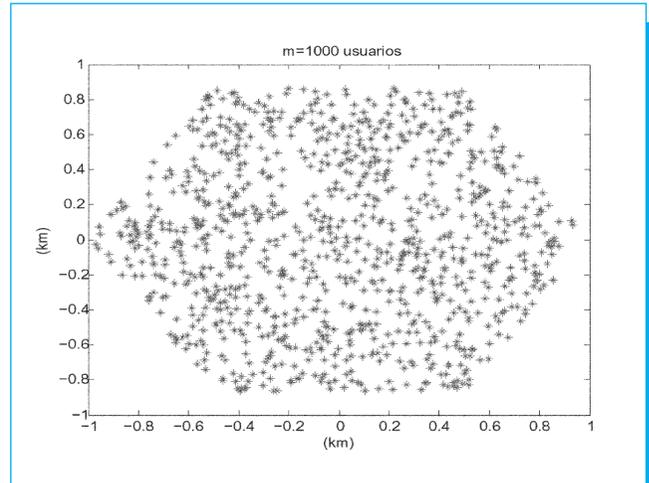


Fig. 9. Generación de  $m = 1\ 000$  usuarios.

Finalmente, en la figura 10 se muestra el resultado obtenido para  $m = 10\ 000$  donde prácticamente se han cubierto uniformemente todos los puntos del hexágono.

## 7. Conclusiones

En este artículo se presenta un algoritmo sencillo para generar usuarios uniformemente distribuidos dentro de celdas hexagonales lo cual es básico para la simulación de eventos discretos de redes celulares con tal estructura de celdas. El algoritmo presentado se basa estrictamente en la geometría hexagonal de la celda y se soporta en la generación uniforme de

variables aleatorias dentro de un rectángulo parcialmente inmerso en cualquiera de los sectores de la celda. Solo hay una traslación de usuarios que caen fuera del sector de la celda en cuestión al área equivalente del mismo dentro de tal sector. Dado que dichos usuarios preservan la distribución uniforme a pesar de tal traslación, se puede afirmar por lo tanto que la densidad de usuarios dentro del hexágono será del tipo uniforme. Adicionalmente, gracias a la traslación de usuarios que se acaba de mencionar, todas las llamadas generadas pueden usarse en las simulaciones que se realicen con miras de análisis de capacidad y desempeño de redes inalámbricas con estructura celular (a diferencia de la posible aproximación de

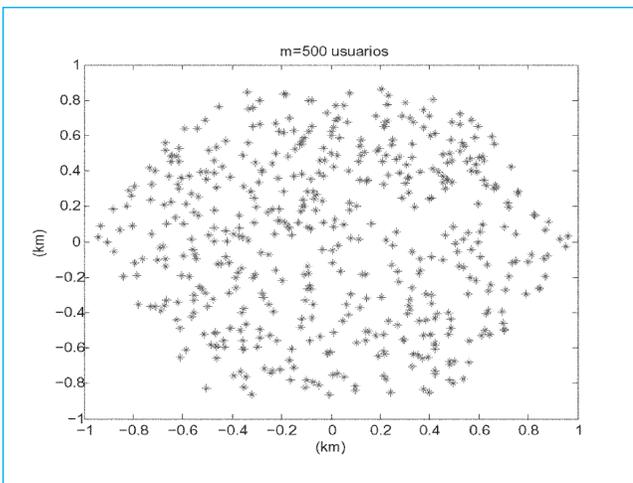


Fig. 8. Generación de  $m = 500$  usuarios.

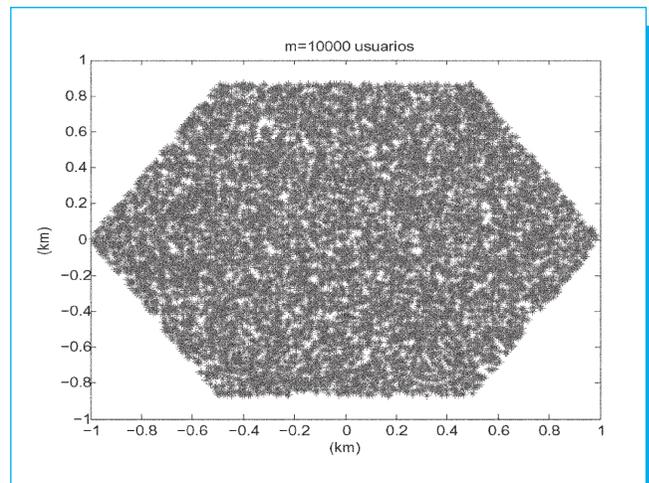


Fig. 10. Generación de  $m = 10\ 000$  usuarios.

descartar aquellos usuarios que estuvieran fuera del área del hexágono como se mencionó en la sección 4). Con el algoritmo propuesto se obtuvieron resultados aceptables, los cuales se aprecian mejor para un número grande de usuarios ( $m > 500$ ), lo cual no es una restricción del algoritmo (es decir se puede aplicar a cualquier número de usuarios).

### Agradecimientos

La autora desea expresar su más sincero agradecimiento al Dr. Mauricio Lara Barrón por sus comentarios, discusiones y sugerencias desinteresadamente compartidas en el desarrollo de este artículo.

### 8. Referencias

- [1] Ghosh A., Wolter D. R., Andrews J. G. and Chen R. «Broadband Wireless Access with WiMax/802.16: Current Performance Benchmarks and Future Potential» *IEEE Communications Magazine*, February 2005, vol. 43, No. 2, pp.129-136
- [2] MacDonald V. H., «The Cellular Concept», *Bell System Technical Journal*, Vol. 58, January 1979, pp. 15-42
- [3] Frost V. and B. Melamed, «Traffic Modeling for Telecommunications Networks», *IEEE Communications Magazine*, March 1994, vol. 32, No. 3, pp. 70-81
- [4] Leung K. K., A. Massey and W. Whitt, «Traffic Models for Wireless Communication Networks», *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, Vol. 12, No. 8, October 1994, pp. 1353-1364
- [5] Klaoudatos G. and T. Taralp, «Traffic Modeling: Techniques, Algorithms and Statistical Measures», *IEEE Global Telecommunication Conference, 2000, Globecom '00*, Vol. 3, pp. 1538-1589
- [6] Schorcht G., U. Freund, H. Salzwedel and H. Keller, «A Hierarchical Object-Oriented Global Traffic Model for Simulation of Mobile Satellite Communication Networks», *IEEE International Conference on Personal Wireless Communications*, 19-17 December 1997, pp. 288-292
- [7] Nakano K., K. Kawamura, N. Karasawa, M. Sengoku and S. Shinoda, «Traffic Characteristics of Dynamic Channel Assignment under Non Uniform Traffic Distribution», *IEEE Vehicular Technology Conference*, 4-7 May 1997, Vol. 3, pp. 1465-1469
- [8] Falciaesceca G., M. Frullone, M. Missiroli and G. Riva, «Impact of Non-Uniform Spatial Traffic Distribution on Cellular CDMA Performance», *IEEE International Symposium on Personal Indoor Mobile Radio Communications*, Vol. 1, 1994, pp. 65-69
- [9] Takeo K., and S. Sato, «The Proposal of CDMA Design Scheme Considering Change in Traffic Distributions», *IEEE 5<sup>th</sup> International Symposium on Spread Spectrum Techniques and Applications*, vol. 1, 1998, pp. 229-233
- [10] Chronopoulod A. T. and C. M. Johnston, «A Real-Time Traffic Simulation System», *IEEE Transactions on*

## Instituto Politécnico Nacional

### Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (Unidad Culhuacán)

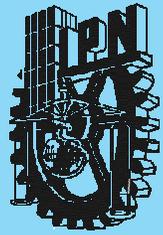
#### Sección de Estudios de Posgrado e Investigación

La ESIME Culhuacán ofrece los siguientes programas de posgrado:

- DOCTORADO EN COMUNICACIONES Y ELECTRÓNICA
- MAESTRÍA EN SISTEMAS ENERGÉTICOS
- MAESTRÍA EN MICROELECTRÓNICA
- ESPECIALIDAD EN SEGURIDAD  
INFORMÁTICA Y TECNOLOGÍAS  
DE LA INFORMACIÓN

Tel. 5624 6000 ext. 73266

# Científica



**Es una revista trimestral que ha cumplido 11 años de publicación sin interrupciones.**

**Se distribuyen en el ámbito nacional aproximadamente 600 ejemplares en universidades, instituciones y centros de investigación públicas y 150 revistas en instituciones educativas privadas.**

**Hacemos llegar más de 100 ejemplares a diferentes industrias de la república.**

**Enviamos también de manera constante a instituciones de Estados Unidos, Japón, Argentina, Chile, Cuba, España, Rumania.**