

# La ecuación generalizada de Pocklington para antenas de alambre de forma arbitraria

Jorge Sosa-Pedroza<sup>1</sup>  
José Luis López-Bonilla<sup>2</sup>  
Víctor Barrera-Figueroa<sup>3</sup>

Sección de Estudios de Posgrado e Investigación (SEPI),  
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME),  
Instituto Politécnico Nacional (IPN).  
Unidad Profesional "Adolfo López Mateos",  
Ed.Z4, 3er piso, Col.Lindavista, México, DF.  
MÉXICO.

email: jsosa@ipn.mx,  
jlopezb@ipn.mx  
vbarreraf@ipn.mx,

Recibido el 22 de agosto de 2004; aceptado el 13 de diciembre de 2004.

## 1. Resumen

Este trabajo describe el procedimiento para obtener la relación entre el campo eléctrico tangencial a la superficie del conductor y su distribución de corriente, conocida como ecuación de Pocklington, originalmente deducida para conductores rectos, pero que aquí se desarrolla, siguiendo la filosofía original, para conductores de forma arbitraria. Con el planteamiento de la ecuación es posible entonces aplicar el método computacional para resolverla, el más popular de ellos se conoce como *método de momentos*.

## 2. Abstract (General Pocklington Equation for Arbitrary Shaped Wire Antennas)

This paper presents the relationship between the electric tangential field and current distribution, known as Pocklington equation, which originally was obtained for straight wires; following the same philosophy, is developed for arbitrary shaped wires. After equation is established is possible to solve it using computational methods, as the Method of Moments, to define wire's current distribution.

**Palabras clave:** ecuación de Pocklington, método de momentos, antenas de alambre de forma arbitraria.

## 3. Introducción

Obtener la distribución de corriente en una antena significa conocer su comportamiento como radiador y determinar sus parámetros principales: ganancia, patrón de radiación, impedancia, etc. A partir de la primera antena construida por Hertz en 1888 para demostrar la teoría de Maxwell y por supuesto las ecuaciones que llevan su nombre, el objetivo de los investigadores dedicados al tema ha sido obtener la distribución de corriente. Actualmente son tres los métodos para obtener la distribución de corriente en los radiadores electromagnéticos [1]: a) el método clásico, que supone la distribución de corriente, b) el método experimental, que mide la distribución de corriente y c). Los métodos computacionales, que resuelven numéricamente las ecuaciones que describen la forma de la distribución de corriente o que permiten determinar los parámetros directamente de la solución de las ecuaciones de Maxwell.

Dos son las posibilidades presentadas para la definición de la ecuación que describe la distribución de corriente en el radiador, una es la solución de los potenciales eléctrico y magnético por separado, planteado por Harrington [2] para conductores rectos y por Mei para conductores curvos [3]; el otro es la generalización de la ecuación de Pocklington planteada originalmente para conductores rectos [4] y que este trabajo desarrolla para conductores de forma arbitraria, que implica la solución de una sola ecuación en función del potencial magnético.

## 4. Desarrollo

### 4.1 La ecuación de Pocklington para alambres de forma arbitraria

El modelo de Pocklington que se desarrolla aquí para fuentes eléctricas, pero que puede aplicarse a fuentes magnéticas, representa el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  en función de la corriente, a partir de la suposición de que la densidad de corriente en el conductor esté concentrada en un filamento equivalente sobre la superficie, como muestra la figura 1; el campo eléctrico en el punto  $p'$  de la figura 1 se determina a partir de los potenciales eléctrico y magnético usando las relaciones clásicas obtenidas a partir de las ecuaciones de Maxwell y considerando una variación armónica con el tiempo:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla V = -j\omega \mathbf{A} - \nabla V. \quad (1)$$

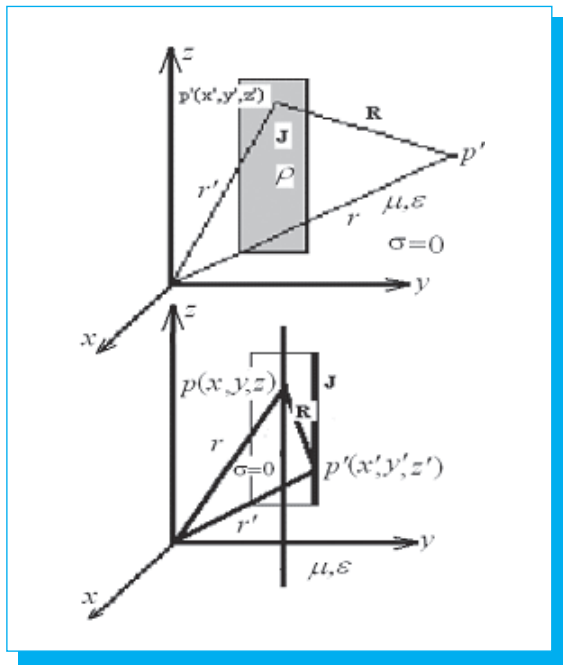


Fig. 1. Geometría del radiador y del filamento de corriente equivalente.

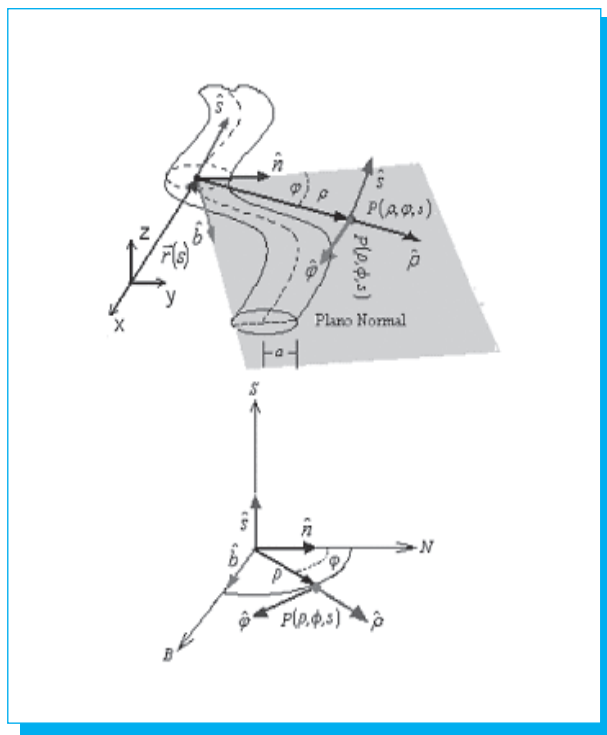


Fig. 2. Conductor de forma arbitraria.

El potencial eléctrico y el potencial magnético se definen en función de la densidad de corriente  $\mathbf{J}$  y de la densidad de carga  $\rho$  en el conductor, por lo que usando las relaciones entre el potencial magnético  $\mathbf{A}$  y la densidad de corriente  $\mathbf{J}$ , y el potencial eléctrico  $V$  y la densidad de carga  $\rho$ , es posible obtener el campo en función de sus fuentes [5], tales relaciones son:

$$\mathbf{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{vol} \frac{\mathbf{J}_e(\mathbf{r}') e^{-jkR}}{R} dv' = \mu \int \mathbf{J} G dv' \quad (2)$$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{vol} \frac{\rho(\mathbf{r}') e^{-jkR}}{R} dv' = \int \rho G dv' \quad (3)$$

donde  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ ,  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$  representa el factor de fase y  $G$  es la función de Green dada por:

$$G = \frac{e^{-jk|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \quad (4)$$

$\mathbf{r}$  es el vector de posición del punto  $p$  en el espacio y  $\mathbf{r}'$  el vector de posición de un elemento diferencial de volumen en el conductor. La suma de las contribuciones de cada elemento de volumen producirá el campo total en el punto  $p$ . Cuando el punto  $p$  se localiza sobre la superficie del conductor,

considerado como perfecto, es posible definir la relación entre campo y densidad de corriente en cualquier posición sobre ella. Sin embargo, por el principio de reciprocidad, tal relación puede verse en dos sentidos: un punto de densidad de corriente produce un campo radiado, considerado como incidente en otro punto, generando en él un elemento de corriente; el campo radiado y el campo incidente son iguales pero de signo contrario, de acuerdo con las condiciones de frontera para conductores perfectos, que implica que la suma de ambos es cero sobre la superficie dada por  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_s$ :

$$\mathbf{E}^i(\mathbf{r}_s) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}_s) = \mathbf{0} \quad (5)$$

El procedimiento de Pocklington supone que toda la densidad de corriente se localiza sobre un filamento infinitamente delgado y el resto del volumen del conductor forma parte del espacio libre, como muestra la figura 1, por supuesto que esta idea sólo es aplicable para conductores delgados en los que la distribución de corriente transversal es uniforme.

Este trabajo generaliza el procedimiento de Pocklington para conductores de forma arbitraria, sin embargo, el que aquí se aplica es algo diferente porque en la geometría del conductor recto el eje del conductor coincide con uno de los ejes del

sistema de referencia, lo que no sucede en nuestro caso, como muestra la figura 2. Igual que antes  $\mathbf{E}^i(\mathbf{r}_s)$  y  $\mathbf{E}^s(\mathbf{r}_s)$  son los campos incidente y radiado, respectivamente.

Partiendo de la ecuación (1),  $\mathbf{E}$  se define únicamente a partir del potencial magnético  $\mathbf{A}$ , para ello se usa la norma de Lorenz dada por:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial V}{\partial t} = -j\omega\mu\epsilon V. \quad (6)$$

Tomando el gradiente en ambos miembros de la ecuación (6) y sustituyendo en (1) se obtiene el campo radiado:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{r}_s) &= -j\omega\mathbf{A} + \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ &= \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} [k^2\mathbf{A} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A})]. \end{aligned} \quad (7)$$

Por facilidad, en el desarrollo tomamos el elemento diferencial de volumen en el punto  $p$  y se sustituye (2) en (7):

$$d\mathbf{E}^s(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{j\omega\epsilon} [k^2\mathbf{J}G + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{J}G)] dv' \quad (8)$$

donde se considera que  $\mathbf{J}$  es constante en el elemento diferencial de volumen y  $G$  es la función de Green definida en (4). Como interesa el campo sobre la superficie del conductor, tomamos la componente tangencial de  $d\mathbf{E}^s$ :

$$\hat{\mathbf{s}} \cdot d\mathbf{E}^s(\mathbf{r}_s) = \frac{1}{j\omega\epsilon} [k^2\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'JG + \hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla(\nabla \cdot \hat{\mathbf{s}}'JG)] dv'$$

y desarrollando la divergencia del segundo miembro de esta ecuación:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} \cdot d\mathbf{E}^s(\mathbf{r}_s) &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \left\{ k^2\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'JG + \right. \\ &\left. \frac{\partial}{\partial s} [\hat{\mathbf{s}}' \nabla(JG) + (\nabla \cdot \hat{\mathbf{s}}')JG] \right\} dv'. \end{aligned} \quad (9)$$

Aplicando condiciones de frontera, el campo radiado tangencial es igual al campo incidente con signo negativo de acuerdo a la ecuación (5); el campo total sobre la superficie del conductor está dado por la integral de (9):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{E} = -\hat{\mathbf{s}}' \cdot \mathbf{E} = -\mathbf{E}_s^i &= \frac{1}{j\omega\epsilon} \int \left\{ k^2\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'JG + \right. \\ &\left. \frac{\partial}{\partial s} [\hat{\mathbf{s}}' \nabla(JG) + (\nabla \cdot \hat{\mathbf{s}}')JG] \right\} dv'. \end{aligned} \quad (10)$$

En la ecuación (10)  $\mathbf{E}_s^i$  representa el campo incidente sobre la superficie del conductor, que se obtiene a partir de la aplicación de las condiciones de frontera, por otro lado, para un conductor delgado,  $s'$  es paralelo al eje y por lo tanto no cambia con  $s$ , entonces su divergencia es cero y  $\mathbf{J}$  es constante en el elemento diferencial de volumen, igualmente para estructuras simétricas la integral del tercer término del segundo miembro de la ecuación es cero, por lo que de (10):

$$E_s^i = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \int \left[ k^2\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'G + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s'} G \right] J dv' \quad (11)$$

Si se considera un conductor cilíndrico la integral de volumen se convierte en:

$$\begin{aligned} E_s^i &= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \int (k^2\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'G \\ &+ \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s'} G) J \rho' dp' d\phi' ds', \end{aligned} \quad (12)$$

en donde la variable  $s'$  representa la longitud del arco sobre el conductor y  $\phi'$  el ángulo azimutal sobre la sección transversal del alambre; si el radio  $a$  del conductor es pequeño comparado con la longitud de onda, la distribución de corriente transversal puede considerarse constante y se expresa por:

$$2\pi a J_s = I_s(s') \quad (13)$$

donde  $I_s(s')$  representa un filamento de corriente muy delgado sobre la superficie. El eje del conductor y la curva del filamento de corriente están definidos por:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(s) &= x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} \\ \mathbf{r}'(s') &= \mathbf{r}(s') + a\mathbf{n}(s') \end{aligned} \quad (14)$$

donde  $\mathbf{n}(s)$  representa el vector unitario normal al eje del alambre; se observa que la curva que representa el filamento de corriente es paralelo al eje del conductor. Aunque existirá un número infinito de curvas paralelas, en la práctica se selecciona la que haga los cálculos más simples. Finalmente la ecuación (12) del campo nos queda:

$$E_s^i = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \int \left[ k^2\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}'G + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial}{\partial s'} G \right] I ds'. \quad (15)$$

La ecuación general de Pocklington dada por (15) puede usarse para cualquier geometría aunque en la literatura se ha

restringido su aplicación para conductores rectos. La geometría del alambre se representa por el producto punto  $\mathbf{s} \cdot \mathbf{s}'$ , donde  $\hat{\mathbf{s}}(s)$  es el vector unitario tangente al eje del conductor y  $\hat{\mathbf{s}}'(s')$  el vector unitario para la curva paralela que representa el filamento de corriente, ambos definidos por (14). La geometría también se expresa por la diferencia de vectores  $[\mathbf{r} - \mathbf{r}']$  como:

$$R = |\mathbf{R}| = \left( [x(s) - x'(s')]^2 + [y(s) - y'(s')]^2 + [z(s) - z'(s')]^2 \right)^{1/2} \quad (16)$$

Una vez que se definen las ecuaciones (14) para la geometría particular seleccionada, se sustituyen en (15) para resolver la integral.

#### 4.2 Reducción de la ecuación de Pocklington

La ecuación generalizada de Pocklington puede reducirse aún más obteniendo la derivada de la función de Green [6]:

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} \frac{e^{-jkR}}{R} = \frac{e^{-jkR}}{R^3} \left\{ \left( \frac{\partial R}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial R}{\partial s'} \right) [2 - k^2 R^2 + 2jkR] - R(1 + jkR) \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} \right\} \quad (17)$$

De acuerdo con la ecuación (16) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial s} &= -\frac{1}{R} \mathbf{R} \cdot \mathbf{s}', & \frac{\partial R}{\partial s'} &= \frac{1}{R} \mathbf{R} \cdot \mathbf{s}, \\ \frac{\partial^2 R}{\partial s \partial s'} &= \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{R} \cdot \mathbf{s}') - R^2 \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}'}{R^3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Sustituyendo (18) en (17):

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial s'} \left( \frac{e^{-jkR}}{R} \right) = \left( \frac{e^{-jkR}}{R^5} \right) \{ R^2(1 + jkR) \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}' - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{s}')(\mathbf{R} \cdot \mathbf{s})(3 - k^2 R^2 + 3jkR) \}$$

y ésta en (15):

$$\begin{aligned} E_s^i &= -(1/j\omega\epsilon) \int \left[ k^2 \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}' + \left( \frac{e^{-jkR}}{R^5} \right) \{ R^2(1 + jkR) \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}' \right. \\ &\quad \left. - (\mathbf{R} \cdot \mathbf{s}')(\mathbf{R} \cdot \mathbf{s})(3 - k^2 R^2 + 3jkR) \} l ds' \right. \\ &= -(1/j\omega\epsilon) \int \left\{ R^2(k^2 R^2 - 1 - jkR) \mathbf{s} \cdot \mathbf{s}' \right. \\ &\quad \left. + (3 + 3jkR - k^2 R^2)(\mathbf{R} \cdot \mathbf{s})(\mathbf{R} \cdot \mathbf{s}') \right\} \left( \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} \right) l ds' \end{aligned} \quad (19)$$

Para un conductor de forma específica, los vectores unitarios  $\hat{\mathbf{s}}$  y  $\hat{\mathbf{s}}'$  así como la distancia  $\mathbf{R}$ , pueden definirse de la geometría,

por lo que en la ecuación (19) la única incógnita es la corriente  $I$  que se obtiene con la solución de la integral usando el *método de momentos*.

#### 5. Conclusiones

Se ha obtenido en este trabajo la ecuación generalizada de Pocklington, aplicada para conductores de forma arbitraria. El procedimiento seguido es diferente al original, debido a que el eje del conductor no coincide, en general, con los ejes de referencia del sistema coordenado. El procedimiento es también diferente al desarrollado por Mei [3], quien usando un método heurístico, parte de la definición del potencial vectorial magnético y el potencial escalar eléctrico para demostrar que es posible generalizar el análisis de conductor recto a uno de forma arbitraria. El análisis que aquí se presenta es más formal ya que utiliza la relación de campo cercano, definido por los potenciales, y del establecimiento de un sistema de coordenadas generalizado permite, no sólo obtener la ecuación generalizada, sino definir una metodología aplicable a cualquier conductor con forma arbitraria, definiendo vectorialmente su geometría y su posición respecto al eje de coordenadas.

Los autores han ensayado la aplicación de la metodología en algunas de las antenas más conocidas, como el conductor recto o el aro circular, con resultados iguales a los que se obtienen por los métodos clásicos, lo que ha servido como referencia para la determinación de la corriente en radiadores menos comunes, como las antenas helicoidales o de cruz.

#### 6. Referencias

- [1] W. L. Stutzman y G. A. Thiele, *Antenna Theory and Design*, John Wiley and Sons, New York, 1998.
- [2] R. F. Harrington, *Origin and Development of the Method of Moments for Field Computation*, in *Applications of the Method of Moments to Electromagnetic Fields*, B. J. Strait editor, SCEE Press, 1980.
- [3] K. K. Mei, On the integral equations of thin wire antennas, *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. AP-13, 1965, pp. 374-378.
- [4] A. Balanis, *Antenna theory, analysis and design*. 2<sup>nd</sup> edition, John Wiley & Sons, New York, 1980, chap. 8.
- [5] J. Sosa Pedroza, *Radiación Electromagnética y Antenas*, Ed. Limusa, México D.F., 1981.
- [6] V. Barrera-Figueroa, J. Sosa-Pedroza and J. López-Bonilla, *Simplification of Pocklington's integral equation for arbitrary bent thin wires*, Boundary Elements XXVII edition, (Electrical Engineering and Electromagnetics), Eds. A. Kassab, C. A. Brebbia, E. Divo and D. Poljak. WIT Trans. on Modelling and Simulation, WIT Press, vol. 39, 2005, pp. 563-574.