Científica Vol. 9 Núm. 1 pp. 23-32
 ISSN 1665-0654. Impreso en México

Teorema SG7 para reducir un sistema de cofactores [Λ] de una matriz de orden *m+n* a otra matriz de cofactores [A] de orden *m*

Guillermina Morales Zapién
S. V. Gaytán

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (ESIME)
Instituto Politécnico Nacional (IPN)
Unldad Profesional "Adolfo López Mateos"
Col. Lindavista. CP 07738, México, DF.
MÉXICO.

email: Guillez85@hotmail.com

Recibido el 9 de febrero de 2004; aceptado el 29 de noviembre de 2004.

1. Resumen

Se propone un teorema para reducir una matriz de cofactores [Λ] de una matriz cuadrada [α] de orden $m+n$, cuyos elementos podemos dividirlos en cuatro cuadrantes, en el primer cuadrante superior izquierdo se tienen elementos que conforman una matriz cuadrada a^h_g no nula de orden «m-filas por m-columnas», en el segundo cuadrante superior derecho se tienen elementos nulos que conforman una matriz $a^h_{g'}$ de orden m-filas por n-columnas, en el cuadrante inferior izquierdo se tiene una matriz cuadrada $a^{h'}_g$ no nula de orden n-filas por m-columnas, y finalmente en el cuadrante inferior derecho se tiene una matriz cuadrada $a^{h'}_{g'}$ de elementos no nulos únicamente en la diagonal, fuera de ella son nulos, de orden n-filas por n-columnas. Entonces los cofactores Λ^g_h para $h=1,2,3,\ldots,m+n$ y $g=1,2,3,\ldots,m+n$, de esta matriz [á], son iguales a los cofactores obtenidos de la matriz a^h_g multiplicados escalarmente por todos los elementos diagonales de la matriz $a^{h'}_{g'}$.

2. Abstract (SG7 Theorem to Decrease a Cofactor System [Λ] of a Matrix of Order *m+n* to an other Cofactors Matrix [A] of Order *m*)

A mathematic theorem is proposed SG7 to reduce the cofactors matrix [Λ] of a square matrix [á] of order "$m+n$", whose elements can divide them in four quadrants, in the first upper left-hand quadrant there are elements that conform a no null square matrix a^h_g of order «m-files for m-columns», in the second quadrant there are null elements that conform a matrix $a^h_{g'}$ of order «m-files for n-columns», in the lower left-hand quadrant there is a no null square matrix $a^{h'}_g$ of order «n-files for m-columns», and finally in the lower right hand quadrant there is a no null square matrix $a^{h'}_{g'}$ only in the diagonal, outside the diagonal the elements are null, of order «n-files for n-columns». Then the cofactors Λ^g_h for the «*h and g*» values of this matrix [á], are equal to the obtained cofactors of the matrix a^h_g multiplied by real numbers for all the diagonal elements of the $a^{h'}_{g'}$ matrix.

Palabras clave: cofactores.

3. Introducción

Muchos de los sistemas de ecuaciones simultáneas se obtienen de problemas prácticos que se analizan en ingeniería, la matriz de cofactores son indispensables en la resolución de estos sistemas. Para determinados problemas se necesita calcular sólo algunos de los cofactores de la matriz, lo que se hace normalmente es calcular de manera automática todos los cofactores, y del total apartar solamente los que nos interesan, pero si se quiere ahorrar tiempo se tiene que tomar en cuenta la forma particular del arreglo de la matriz para la cual se quieren encontrar los cofactores pedidos sin necesidad de calcular todos.

Por ejemplo, supóngase que para cierto problema particular se extrae el arreglo matricial cuadrado de 5x5 elementos mostrados de la forma siguiente:

$$[\alpha]=\begin{bmatrix} a_1^1 a_2^1 a_3^1 a_4^1 a_5^1 \\ a_1^2 a_2^2 a_3^2 a_4^2 a_5^2 \\ a_1^3 a_2^3 a_3^3 a_4^3 a_5^3 \\ a_1^4 a_2^4 a_3^4 a_4^4 a_5^4 \\ a_1^5 a_2^5 a_3^5 a_4^5 a_5^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -8 & -9 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{1}$$

El arreglo de la ecuación (1) se puede dividir imaginariamente en los cuadrantes dados por:

$$[\alpha]=\begin{bmatrix} a_1^1 a_2^1 a_3^1 & a_4^1 a_5^1 \\ a_1^2 a_2^2 a_3^2 & a_4^2 a_5^2 \\ a_1^3 a_2^3 a_3^3 & a_4^3 a_5^3 \\ a_1^4 a_2^4 a_3^4 & a_4^4 a_5^4 \\ a_1^5 a_2^5 a_3^5 & a_4^5 a_5^5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -8 & -9 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Los cuadrantes en que fue dividida la matriz de la ecuación (1) no es de manera casual, sino que en el cuadrante superior derecho todos los elementos deben ser cero, y a la vez debe cumplirse que en el cuadrante inferior derecho debe tener todos sus elementos no nulos en la diagonal, y también debe cumplirse al mismo tiempo que el cuadrante superior izquierdo debe ser un arreglo cuadrado para que también se le puedan calcular los cofactores de forma independiente, todo esto tal y como se muestra en la división imaginaria que está indicada con líneas punteadas de la ecuación (2).

Y para la matriz de la ecuación (2) únicamente nos interesan los cofactores para las «posiciones» de la matriz del cuadrante superior izquierdo dada por el arreglo de números de 3x3 mostrada a continuación.

$$\begin{bmatrix} \Lambda_1^1 \Lambda_2^1 \Lambda_3^1 \\ \Lambda_1^2 \Lambda_2^2 \Lambda_3^2 \\ \Lambda_1^3 \Lambda_2^3 \Lambda_3^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} cof\ a_1^1 & cof\ a_1^2 & cof\ a_1^3 \\ cof\ a_2^1 & cof\ a_2^2 & cof\ a_2^3 \\ cof\ a_3^1 & cof\ a_3^2 & cof\ a_3^3 \end{bmatrix}= \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \tag{3}$$

Entonces, calculando los cofactores nombrados como [Ë] para la ecuación (1) se tiene:

$$[\Lambda]=\begin{bmatrix} \Lambda_1^1 & \Lambda_2^1 & \Lambda_3^1 & \Lambda_4^1 & \Lambda_5^1 \\ \Lambda_1^2 & \Lambda_2^2 & \Lambda_3^2 & \Lambda_4^2 & \Lambda_5^2 \\ \Lambda_1^3 & \Lambda_2^3 & \Lambda_3^3 & \Lambda_4^3 & \Lambda_5^3 \\ \Lambda_1^4 & \Lambda_2^4 & \Lambda_3^4 & \Lambda_4^4 & \Lambda_5^4 \\ \Lambda_1^5 & \Lambda_2^5 & \Lambda_3^5 & \Lambda_4^5 & \Lambda_5^5 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} cof\ a_1^1 & cof\ a_1^2 & cof\ a_1^3 & cof\ a_1^4 & cof\ a_1^5 \\ cof\ a_2^1 & cof\ a_2^2 & cof\ a_2^3 & cof\ a_2^4 & cof\ a_2^5 \\ cof\ a_3^1 & cof\ a_3^2 & cof\ a_3^3 & cof\ a_3^4 & cof\ a_3^5 \\ cof\ a_4^1 & cof\ a_4^2 & cof\ a_4^3 & cof\ a_4^4 & cof\ a_4^5 \\ cof\ a_5^1 & cof\ a_5^2 & cof\ a_5^3 & cof\ a_5^4 & cof\ a_5^5 \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -90 & -30 & -50 & 0 & 0 \\ 85 & -50 & -5 & 0 & 0 \\ -30 & -10 & 140 & 0 & 0 \\ 570 & 190 & 630 & -470 & 0 \\ 33 & -130 & -201 & 0 & -94 \end{bmatrix} \tag{4}$$

De la matriz de cofactores de la ecuación (4) se extraen los cofactores incógnitos pedidos por la ecuación (3), los cuales están dados por:

$$\begin{bmatrix} cof\ a_1^1 & cof\ a_1^2 & cof\ a_1^3 \\ cof\ a_2^1 & cof\ a_2^2 & cof\ a_2^3 \\ cof\ a_3^1 & cof\ a_3^2 & cof\ a_3^3 \end{bmatrix}= =\begin{bmatrix} -90 & -30 & -50 \\ 85 & -50 & -5 \\ -30 & -10 & 140 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Por otro lado, para el arreglo cuadrado de 3x3 números del cuadrante superior izquierdo de la ecuación (2), la matriz de sus cofactores nombrada por [A] es:

$$[A]=\begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Se observa que los cofactores de la ecuación (6) y los cofactores de la ecuación (5) no son iguales, sin embargo el teorema SG7 que se va a establecer con ciertas restricciones para cualquier matriz [α] en el apartado 4.1 de este artículo relaciona la matriz de cofactores [A] dada por la ecuación (6) con la matriz de cofactores [Λ] dada por la ecuación (4) mediante los elementos diagonales de la matriz del cuadrante inferior derecho de la ecuación (2).

El teorema matemático SG7 no se encuentra en la literaratura de los libros [1,2,3,4,5], ni de otros.

4. Desarrollo

4.1 Formulación del teorema SG7

Para cualquier matriz de elementos dada por

$$[\alpha]=\left[\begin{array}{c:c} a_g^h & a_{g'}^h \\ \hdashline a_g^{h'} & a_{g'}^{h'} \end{array}\right] \tag{7}$$

$h=1,2,\ldots,m;\ h'=m+1,m+2,\ldots,m+n$
$g=1,2,\ldots,m;\ g'=m+1,m+2,\ldots,m+n$

donde las componentes de cada cuadrante expandidas están dadas por:

$$a_g^h = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots a_m^2 \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ a_1^m & a_2^m & \ldots a_m^m \end{bmatrix} \tag{8}$$

Las tres restantes son:

$$a_{g'}^h = \begin{bmatrix} a_{m+1}^1 & a_{m+2}^1 & \ldots a_{m+n}^1 \\ a_{m+1}^2 & a_{m+2}^2 & \ldots a_{m+n}^2 \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ a_{m+1}^m & a_{m+2}^m & \ldots a_{m+n}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0\ldots 0 \\ 0 & 0\ldots 0 \\ . & \\ . & \\ . & \\ 0 & 0\ldots 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$a_g^{h'} = \begin{bmatrix} a_1^{m+1} & a_2^{m+1} & \ldots a_m^{m+1} \\ a_1^{m+2} & a_2^{m+2} & \ldots a_m^{m+2} \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ a_1^{m+n} & a_2^{m+n} & \ldots a_m^{m+n} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$a_{g'}^{h'} = \begin{bmatrix} a_{m+1}^{m+1} & a_{m+2}^{m+1} & \ldots a_{m+n}^{m+1} \\ a_{m+1}^{m+2} & a_{m+2}^{m+2} & \ldots a_{m+n}^{m+2} \\ . & & \\ . & & \\ . & & \\ a_{m+1}^{m+n} & a_{m+2}^{m+n} & \ldots a_{m+n}^{m+n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{m+1}^{m+1} & 0\ldots\ldots 0 \\ 0 & a_{m+2}^{m+2}\ldots . 0 \\ . & \\ . & \\ 0 & 0\ldots . . a_{m+n}^{m+n} \end{bmatrix} \tag{11}$$

Las componentes de $a_{g'}^{h'}$ en la diagonal lleva a los elementos no nulos, todos los demás son ceros. Y siendo [A] la matriz de los cofactores de la matriz de la ecuación (8), cuyas componentes son los determinantes:

$$A_h^g = Cof\ a_g^h = (-1)^{h+g} \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \ldots a_{g-1}^1 & a_{g+1}^1 \ldots a_m^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \ldots a_{g-1}^2 & a_{g+1}^2 \ldots a_m^2 \\ \ldots & & \\ a_1^{h-1} & a_2^{h-1} \ldots a_{g-1}^{h-1} & a_{g+1}^{h-1} \ldots a_m^{h-1} \\ a_1^{h+1} & a_2^{h+1} \ldots a_{g-1}^{h+1} & a_{g+1}^{h+1} \ldots a_m^{h+1} \\ \ldots & & \\ a_1^m & a_2^m \ldots a_{g-1}^m & a_{g+1}^m \ldots a_m^m \end{vmatrix} \tag{12}$$

$$h,g = 1,2,3,\ldots,m$$

Nótese que en la ecuación (12) la fila h-ésima y la columna q-ésima no aparecen, esto es por la definición de cofactor. También nótese que las filas h y las columnas g del $cof\ a^h{}_g$ se transforman en columnas h y filas g de la resultante $A^g{}_h$ [1,2,3,4].

Entonces las componentes $\Lambda^g{}_h = cof\ \alpha^h{}_g$ de la matriz de los cofactores $[\Lambda]$ de la ecuación (7) limitada única y exclusivamente para el cuadrante superior izquierdo, o sea el cuadrante donde están las componentes $a^h{}_g$ son:

$$\Lambda_h^g = a_{m+1}^{m+1} a_{m+2}^{m+2} \ldots a_{m+n}^{m+n} A_h^g$$
$$h = 1,2,\ldots,m; \quad g = 1,2,\ldots,m \tag{13}$$

Donde la $A^g{}_h$ de la ecuación (13) está dada por la ecuación (12).

Demostración

1º. Se probará la ecuación (13) para $h = g = 1$; es decir, se probará que:

$$\Lambda_{h=1}^{g=1} = a_{m+1}^{m+1} a_{m+2}^{m+2} \ldots a_{m+n}^{m+n} \quad A_{h=1}^{g=1} \tag{14}$$

Se tomará el cofactor $\alpha^{h=1}{}_{g=1}$, es decir, se eliminará la fila h=1 y la columna g=1 de la ecuación (7), para tener:

$$\Lambda_{h=1}^{g=1} = cof\ \alpha_{g=1}^{h=1} =$$

$$= (-1)^{1+1} \left| \begin{array}{ccc:cccc} a_2^2 & a_3^2 \ldots & a_m^2 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ a_2^3 & a_3^3 \ldots & a_m^3 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ a_2^m & a_3^m \ldots & a_m^m & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ \hdashline a_2^{m+1} & a_3^{m+1} \ldots & a_m^{m+1} & a_{m+1}^{m+1} & 0\ldots & 0 & 0 \\ a_2^{m+2} & a_3^{m+2} \ldots & a_m^{m+2} & 0 & a_{m+2}^{m+2}\ldots & 0 & 0 \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ . & & & & & & \\ a_2^{m+n} & a_3^{m+n} \ldots & a_m^{m+n} & 0 & 0\ldots & 0 & a_{m+n}^{m+n} \end{array} \right| \tag{15}$$

$$\Lambda^{g=1}_{h=1} = a^{m+1}_{m+1} a^{m+2}_{m+2} \ldots a^{m+n}_{m+n} \left\{ (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a^2_2 & a^2_3 \ldots & a^2_m \\ a^3_2 & a^3_3 \ldots & a^3_m \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ a^m_2 & a^m_3 \ldots & a^m_m \end{vmatrix} \right\} \tag{16}$$

El determinante de la ecuación (15) se desarrolló por columnas empezando por la última, solamente quedan la multiplicación entre sí de los elementos de la diagonal del cuadrante inferior derecho y, además, multiplicando al determinante del cofactor $A^1{}_1$, este determinante se sabe que es el cofactor $A^1{}_1$, porque este cofactor se obtiene inmediatamente de la matriz de cofactores de la ecuación (8), y que en este caso está dado por la ecuación (12) con $h = g = 1$, puesto que la fila $h = 1$ no aparece y la columna $g = 1$ tampoco.

También se tomaron en cuenta los posicionamientos de los elementos de la diagonal para darles el signo correcto, en este caso todos los elementos de la diagonal tienen signo positivo, porque es el número –1 elevado a una potencia par. Por ejemplo para el último de la diagonal:

$$(-1)^{(m+n)+(m+n)} = (-1)^{2(m+n)} \tag{17}$$

La ecuación (16) se escribe finalmente como:

$$\begin{aligned} A^{g=1}_{h=1} &= a^{m+1}_{m+1} a^{m+2}_{m+2} \ldots a^{m+n}_{m+n} \ Cof\, a^{h=1}_{g=1} \\ &= a^{m+1}_{m+1} a^{m+2}_{m+2} \ldots a^{m+n}_{m+n} \ A^{g=1}_{h=1} \end{aligned} \tag{18}$$

2º. Se demostrará la ecuación (13) para el caso general:

Sea la matriz de cofactores [Λ] de la ecuación (7), donde las componentes de los cofactores para h,g=1,2,3,...,m. son los determinantes:

$$\Lambda^g_h = cof\, \alpha^{\ h}_{\ g}\,.$$

Esto queda de la manera siguiente (nótese que no están ni la fila h-ésima, y ni la columna g-ésima en el siguiente desarrollo de la ecuación):

$$(-1)^{h+g} \left| \begin{array}{cccccc:cccc} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_{g-1} & a^1_{g+1} \ldots & a^1_m & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_{g-1} & a^2_{g+1} \ldots & a^2_m & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ a^{h-1}_1 & a^{h-1}_2 & \ldots & a^{h-1}_{g-1} & a^{h-1}_{g+1} \ldots & a^{h-1}_m & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ a^{h+1}_1 & a^{h+1}_2 & \ldots & a^{h+1}_{g-1} & a^{h+1}_{g+1} \ldots & a^{h+1}_m & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ a^m_1 & a^m_2 & \ldots & a^m_{g-1} & a^m_{g+1} \ldots & a^m_m & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ \hdashline a^{m+1}_1 & a^{m+1}_2 & \ldots & a^{m+1}_{g-1} & a^{m+1}_{g+1} \ldots & a^{m+1}_m & a^{m+1}_{m+1} & 0\ldots & 0 & 0 \\ a^{m+2}_1 & a^{m+2}_2 & \ldots & a^{m+2}_{g-1} & a^{m+2}_{g+1} \ldots & a^{m+2}_m & 0 & a^{m+2}_{m+2}\ldots & 0 & 0 \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ \cdot & & & & & & & & & \\ a^{m+n}_1 & a^{m+n}_2 & \ldots & a^{m+n}_{g-1} & a^{m+n}_{g+1} \ldots & a^{m+n}_m & 0 & 0 \ldots & 0 & a^{m+n}_{m+n} \end{array} \right| \tag{19}$$

Tomando el determinante del cofactor general $\Lambda^g{}_h$ de la ecuación (19), y desarrollando por columnas, empezando por la última de la derecha, y tomando en cuenta los posicionamientos de los elementos de la diagonal, que en este caso todos son positivos de manera análoga a como se hizo para la ecuación (18), se tiene que:

$$\Lambda^g_h = (-1)^{h+g} a^{m+1}_{m+1} a^{m+2}_{m+2} \ldots a^{m+n}_{m+n} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_{g-1} & a^1_{g+1} \ldots & a^1_m \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_{g-1} & a^2_{g+1} \ldots & a^2_m \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ a^{h-1}_1 & a^{h-1}_2 & \ldots & a^{h-1}_{g-1} & a^{h-1}_{g+1} \ldots & a^{h-1}_m \\ a^{h+1}_1 & a^{h+1}_2 & \ldots & a^{h+1}_{g-1} & a^{h+1}_{g+1} \ldots & a^{h+1}_m \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ a^m_1 & a^m_2 & \ldots & a^m_{g-1} & a^m_{g+1} \ldots & a^m_m \end{vmatrix} \tag{20}$$

con : $h,g = 1,2,3,\ldots,m$.

Pero ahora el determinante de la parte derecha, multiplicado por el $(-1)^{h+g}$ de la ecuación (20), es la ecuación (12), y esta última son las componentes de la matriz de los cofactores que se obtiene inmediatamente de la ecuación (8). Entonces la ecuación (20) queda finalmente como:

$$\begin{aligned}\Lambda^g_h &= cof\ \alpha^h_g = \\ &= a^{m+1}_{m+1} a^{m+2}_{m+2} \ldots a^{m+n}_{m+n}\ cof\ a^h_g = \\ &= a^{m+1}_{m+1} a^{m+2}_{m+2} \ldots a^{m+n}_{m+n}\ A^g_h\end{aligned} \qquad (21)$$

con $\quad h,g = 1,2,3,\ldots,m.$

donde las A^g_h están dadas por los determinantes:

$$A^g_h = cof\, a^h_g = (-1)^{h+g} \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots a^1_{g-1} & a^1_{g+1} \ldots a^1_m \\ a^2_1 & a^2_2 \ldots & a^2_{g-1} & a^2_{g+1} \ldots a^2_m \\ . & & & \\ . & & & \\ a^{h-1}_1 & a^{h-1}_2 \ldots a^{h-1}_{g-1} & a^{h-1}_{g+1} \ldots a^{h-1}_m & \\ a^{h+1}_1 & a^{h+1}_2 \ldots a^{h+1}_{g-1} & a^{h+1}_{g+1} \ldots a^{h+1}_m & \\ . & & & \\ . & & & \\ a^m_1 & a^m_2 \ldots & a^m_{g-1} & a^m_{g+1} \ldots a^m_m \end{vmatrix} \qquad (22)$$

$h,g = 1,2,3,\ldots,m$

Por lo tanto, la ecuación (13) queda probada y el teorema SG7 también.

Caso particular:

Cuando todos los elementos de la diagonal del cuadrante inferior derecho de la ecuación (19) valen +1, entonces los cofactores de la eccuación (21) quedan :

$$\Lambda^g_h = A^g_h \qquad (23)$$

$h,g = 1,2,3,\ldots,m.$

4.2 Generalización del teorema SG7

Cuando se calculan los cofactores para las posiciones del cuadrante inferior izquierdo de la eccuación (7) se tiene que:

$$\Lambda^g_{h'} = Cof\ \alpha^{h'}_g = 0 \qquad (24)$$

con $\quad h' = m+1, m+2, \ldots, m+n$

$\quad g = 1,2,3,\ldots,m$

Se demostrará la ecuación (24).

Demostración.

$$\Lambda^g_{h'} = cof\ \alpha^{h'}_g = (-1)^{h'+g} \left\{ \begin{vmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \ldots & a^1_{g-1} & a^1_{g+1} & \ldots a^1_m & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ a^2_1 & a^2_2 & \ldots & a^2_{g-1} & a^2_{g+1} & \ldots a^2_m & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ . & & & & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & & & & \\ .. & & & & & & & & & & & \\ a^m_1 & a^m_2 & \ldots & a^m_{g-1} & a^m_{g+1} & \ldots a^m_m & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ a^{m+1}_1 & a^{m+1}_2 & \ldots & a^{m+1}_{g-1} & a^{m+1}_{g+1} & \ldots a^{m+1}_m & a^{m+1}_{m+1} & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ a^{m+2}_1 & a^{m+2}_2 & \ldots & a^{m+2}_{g-1} & a^{m+2}_{g+1} & \ldots a^{m+2}_m & 0 & a^{m+2}_{m+2} & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots 0 \\ . & & & & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & & & & \\ a^{m+h'-1}_1 & a^{m+h'-1}_2 & \ldots & a^{m+h'-1}_{g-1} & a^{m+h'-1}_{g+1} & \ldots a^{m+h'-1}_m & 0 & 0 & \ldots a^{m+h'-1}_{m+h-1} & 0 & 0 & \ldots 0 \\ a^{m+h'+1}_1 & a^{m+h'+1}_2 & \ldots & a^{m+h'+1}_{g-1} & a^{m+h'+1}_{g+1} & \ldots a^{m+h'+1}_m & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & a^{m+h'+1}_{m+h'+1} & \ldots 0 \\ . & & & & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & & & & \\ . & & & & & & & & & & & \\ a^{m+n}_1 & a^{m+n}_2 & & \ldots a^{m+n}_{g-1} & a^{m+n}_{g+1} & \ldots a^{m+n}_m & 0 & 0 & \ldots 0 & 0 & 0 & \ldots a^{m+n}_{m+n} \end{vmatrix} \right\} (25)$$

Los cofactores pedidos para las filas $h'=m+1, m+2, \ldots, m+n$, y las columnas $g = 1,2,3,\ldots,m,$ de la ecuación (7) son los determinantes dados por el elemento general siguiente: (25)

Nótese en la ecuación (25) la columna de ceros cuando se elimina la fila h'-ésima y la columna g-ésima de la ecuación (7), por lo tanto la ecuación (25) obviamente vale cero.

Por ejemplo, para calcular el cofactor $\Lambda^1_{m+1} = cof\ \alpha^{m+1}_1$, se tiene que eliminar la fila $m+1$ y la columna «1» de la ecuación (25), entonces el determinante queda con una columna de ceros en donde estaba el elemento a^{m+1}_{m+1}, y por lo tanto el determinante es cero, es decir queda:

$$\Lambda^1_{m+1} = cof\, \alpha^{m+1}_1 = 0 \qquad (26)$$

Esto mismo se hace para el desarrollo de todos los cofactores en las posiciones coordenadas de las filas $h' = m+1,\ m+2,\ m+3, \ldots, m+n$, y las columnas $g=1,2,3,\ldots,m$, quedando

$$\Lambda^g_{h'} = cof\, \alpha^{h'}_g = 0 \qquad (27)$$

con $\quad h' = m+1, m+2, \ldots, m+n$

$\quad g = 1, 2, 3, \ldots, m$

Pero la ecuación (27) es la (24), y por lo tanto esta ecuación queda demostrada.

Ahora, juntando los resultados de las ecuaciones (13) y (24) se tiene el teorema SG7 generalizado, quedando:

$$\begin{cases} \Lambda^g_h = a^{m+1}_{m+1} a^{m+2}_{m+2} \ldots a^{m+n}_{m+n} A^g_h \\ \text{con}: \Lambda^g_h = Cof\ \alpha^h_g \ \ \& \ \ A^g_h = Cof\ a^h_g \\ \text{para } h = 1,2,\ldots,m;\ g = 1,2,\ldots,m \\ \& \\ \Lambda^g_{h'} = Cof\ \alpha^{h'}_g = 0 \\ \text{para } h' = m+1, m+2, \ldots, m+n\ ;\ g = 1,2,3,\ldots,m \end{cases} \tag{28}$$

Puede verse que en los cofactores $cof\,\alpha^h_g$, $cof\,a^h_g$ y $cof\,\alpha^{h'}_g$ las letras h y h' indican filas, y la letra g indica columna; en las resultantes $\Lambda^g_{h'}$, A^g_h y $\Lambda^g_{h'}$ la letra g se convierte en fila y las letras h y h' en columnas.

4.3 Ejemplos de aplicación numérica

Ejemplo 1

Para la matriz [á] dada por

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} a^h_g & a^h_{g'} \\ a^{h'}_g & a^{h'}_{g'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -8 & -9 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{29}$$

h=1,2,3; h'=4,5
g=1,2,3; g'=4,5

donde los cuadrantes, y los elementos de la diagonal del cuadrante inferior derecho son:

$$\begin{cases} a^h_g = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}; a^h_{g'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ a^{h'}_g = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -2 \\ -8 & -9 & 4 \end{bmatrix}; a^{h'}_{g'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ \text{y los elementos de la diagonal son} \\ a^4_4 = 1; a^5_5 = 5 \end{cases} \tag{30}$$

Se encuentra que todos los cofactores para la matriz [α], son:

$$[A] = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 & A^1_4 & A^1_5 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 & A^2_4 & A^2_5 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 & A^3_4 & A^3_5 \\ A^4_1 & A^4_2 & A^4_3 & A^4_4 & A^4_5 \\ A^5_1 & A^5_2 & A^5_3 & A^5_4 & A^5_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90 & -30 & -50 & 0 & 0 \\ 85 & -50 & -5 & 0 & 0 \\ -30 & -10 & 140 & 0 & 0 \\ 570 & 190 & 630 & -470 & 0 \\ 33 & -130 & -201 & 0 & -94 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Los cofactores Λ^g_h que nos interesan de la ecuación (31), son los valores que corren en las filas y las columnas h,g= 1,2,3 y están dados por:

$$\begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90 & -30 & -50 \\ 85 & -50 & -5 \\ -30 & -10 & 140 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Equivalentemente, la ecuación (32) son los cofactores Λ^g_h para h,g=1,2,3.

Por el otro lado, tenemos que los cofactores [A] de la matriz cuadrada del cuadrante superior izquierdo de la ecuación (29) son:

$$[A] = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix} \tag{33}$$

Equivalentemente, la ecuación (33) son los cofactores A^g_h que corren desde h,g=1,2,3.

Ahora, multiplicando la matriz de los cofactores de la ecuación (33) por los elementos a^4_4=1, a^5_5=5, se tiene que:

$$a^4_4 a^5_5 \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90 & -30 & -50 \\ 85 & -50 & -5 \\ -30 & -10 & 140 \end{bmatrix} \tag{34}$$

o lo que es lo mismo

$$a^4_4 a^5_5 \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix} \tag{35}$$

Equivalentemente, la ecuación (35) se puede escribir como

$$\Lambda^{g}_{h} = cof\,\alpha^{h}_{g} = a^{4}_{4}a^{5}_{5}\,cof\,a^{h}_{g} = a^{4}_{4}a^{5}_{5}A^{g}_{h} \qquad (36)$$
$$h,g = 1,2,3$$

El resultado de la ecuación (36) es lo que predice el teorema SG7. Este teorema generalizado predice que las componentes de los cofactores $\Lambda^{g}_{h'}$ para la filas g=1,2,3 y columnas h'=4,5, de la matriz [Λ] valen cero, esto es cierto y está indicado en la ecuación (31), que puede escribirse como:

$$\Lambda^{g}_{h'} = cof\,\alpha^{h'}_{g} = 0 \qquad (37)$$
$$h' = 4, 5; \quad g = 1, 2, 3$$

Ejemplo 2

Supóngase que para cierto problema particular se extrae el arreglo matricial cuadrado de 11x11 elementos mostrados de la forma siguiente:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} -20 & 15 & 37 & -12 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 45 & 34 & 23 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21 & -35 & -9 & -29 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 56 & 8 & 3 & -19 & 84 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & -15 & 4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 97 & -5 & 10 & -9 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -51 & 1 & -9 & -28 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -35 & 15 & -77 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 45 & -9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 6/16 & 0 & 0 \\ 62 & -22 & 8 & -94 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8/10 & 0 \\ -12 & -7 & 10 & -9 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad (38)$$

El arreglo de la ecuación (38) se puede dividir imaginariamente en los cuadrantes dados por:

$$[\alpha] = \left[\begin{array}{ccccc|cccccc} -20 & 15 & 37 & -12 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 45 & 34 & 23 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -21 & -35 & -9 & -29 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 56 & 8 & 3 & -19 & 84 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 17 & -15 & 4 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 97 & -5 & 10 & -9 & -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -51 & 1 & -9 & -28 & 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -35 & 15 & -77 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 45 & -9 & 3 & 0 & 0 & 0 & 6/16 & 0 & 0 \\ 62 & -22 & 8 & -94 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8/10 & 0 \\ -12 & -7 & 10 & -9 & -5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \qquad (39)$$

Se divide la matriz de la ecuación (38) de tal forma que en el cuadrante superior derecho todos los elementos deben ser ceros, y a la vez debe cumplirse que en el cuadrante inferior derecho debe tener todos sus elementos no nulos en la diagonal, y también debe cumplirse al mismo tiempo que el cuadrante superior izquierdo debe ser un arreglo cuadrado para que se le puedan calcular los cofactores, todo esto tal y como se muestra en la división imaginaria que está indicada con líneas punteadas de la ecuación (39), todo esto cumple con las restricciones del teorema.

Y de la matriz de la acuación (39) únicamente nos interesan los cofactores del la matriz del cuadrante superior izquierdo donde está el arreglo de números de 5x5 mostrado a continuación.

$$\begin{vmatrix} -20 & 15 & 37 & -12 & 5 \\ 2 & 45 & 34 & 23 & -1 \\ -21 & -35 & -9 & -29 & -8 \\ 56 & 8 & 3 & -19 & 84 \\ 17 & -15 & 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} \qquad (40)$$

La matriz de cofactores nombrada como [A] de la ecuación (40) está dada por:

[A] =

$$= \begin{vmatrix} -1451030 & 2081016 & 2063040 & 309330 & 143234 \\ -1235920 & 1828274 & 1755810 & 258370 & -351284 \\ 417515 & -290283 & -335020 & -56665 & 298158 \\ 1993215 & -3007823 & -3217620 & -458115 & 233198 \\ 1520995 & -2231439 & -2258410 & -217945 & -19936 \end{vmatrix} \qquad (41)$$

Ahora, para obtener los cofactores de la matriz original de la ecuación (38) en las primeras 5 filas y 5 primeras columnas, que es lo que interesa, se aplica el teorema SG7, se multiplican todos los elementos de la diagonal que aparecen en la matriz del cuadrante inferior derecho de la ecuación (39) por la matriz de la ecuación (41), quedando:

$$[\Lambda] = (-2)(5)(-1)\left(\frac{6}{16}\right)\left(\frac{8}{10}\right)(-4)[A]$$

$$= \begin{bmatrix} 17412360 & -24972192 & -24756480 & -3711960 & -1718808 \\ 14831040 & -21939288 & -21069720 & -3100440 & 4215288 \\ -5010180 & 3483396 & 4020240 & 679980 & -3577896 \\ -23918580 & 36093876 & 38611440 & 5497380 & -2798376 \\ -18251940 & 26777268 & 27100920 & 2615340 & 239232 \end{bmatrix} \qquad (42)$$

Lo anterior es más rápido que obtener los 11x11 cofactores de la matriz de la ecuación (38) y extraer los primeros 5x5 cofactores que nos interesan.

Calculando los cofactores $cof\ \alpha^{h'}_{g}$ para las posiciones coordenadas del cuadrante inferior izquierdo de la ecuación (39), se obtienen las componentes $\Lambda^{g}_{h'} = 0$ para las filas g=1,2,3,4,5, y las columnas h'=6,7,8,9,10,11, de la matriz [Λ], esto tal y como lo predice el teorema generalizado SG7.

4.3 Otra forma equivalente de escribir el teorema generalizado SG7 del apartado anterior

Como los índices *h, h', g y g'* están indicados con sus valores para la matriz [α] en la ecuación (7), y los índices en los cofactores $\Lambda^{g}_{h'}$, A^{g}_{h} y $\Lambda^{g}_{h'}$ están indicados para los valores que corren en la ecuación (28), por lo tanto los índices de la matriz como de los cofactores corren para los mismos valores, entonces en la primera parte de la ecuación (28) se pueden intercambiar los índices *h* por *g* y la *g* por la *h* puesto que ambos corren para los mismos valores, esto sin afectar para nada a la ecuación original, por lo tanto la ecuación queda como:

$$\begin{cases} \Lambda^{h}_{g} = a^{m+1}_{m+1} a^{m+2}_{m+2} \ldots a^{m+n}_{m+n} A^{h}_{g} \\ \text{con: } \Lambda^{h}_{g} = cof\ \alpha^{g}_{h} \ \ \&\ \ A^{h}_{g} = cof\ a^{g}_{h} \\ \text{para } h = 1,2,\ldots,m;\ g = 1,2,\ldots,m \end{cases} \tag{43}$$

En la segunda parte de la ecuación (28), la *g* se va a cambiar por la *h*, y la *h'* por la *g'*, entonces queda:

$$\begin{cases} \Lambda^{h}_{g'} = cof\ \alpha^{g'}_{h} = 0 \\ \text{para } g' = m+1, m+2, \ldots, m+n\ ;\ h = 1,2,3,\ldots,m \end{cases} \tag{44}$$

Finalmente juntamos las ecuaciones (43) y (44) en una sola, la ecuación generalizada equivalente queda:

$$\begin{cases} \Lambda^{h}_{g} = a^{m+1}_{m+1} a^{m+2}_{m+2} \ldots a^{m+n}_{m+n} A^{h}_{g} \\ \text{con: } \Lambda^{h}_{g} = cof\ \alpha^{g}_{h} \ \ \&\ \ A^{h}_{g} = cof\ a^{g}_{h} \\ \text{para } h = 1,2,\ldots,m;\ g = 1,2,\ldots,m \\ \& \\ \Lambda^{h}_{g'} = cof\ \alpha^{g'}_{h} = 0 \\ \text{para } g' = m+1, m+2, \ldots, m+n\ ;\ h = 1,2,3,\ldots,m \end{cases} \tag{45}$$

Nótese que en los cofactores $cof\ \alpha^{g}_{h}$, $cof\ a^{g}_{h}$ y $cof\ \alpha^{g'}_{h}$ las letras *g y g'* ahora indican filas, y la letra *h* indica columna; en las resultantes Λ^{h}_{g}, A^{h}_{g} y $\Lambda^{h}_{g'}$ la letra *h* se convierte en fila y las letras *g y g'* en columnas.

Los cofactores de la ecuación (45) quedarían representados como la matriz dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \Lambda^{1}_{1} & \Lambda^{1}_{2} \ldots & \Lambda^{1}_{m} & \Lambda^{1}_{m+1} & \Lambda^{1}_{m+2} \ldots & \Lambda^{1}_{m+n} \\ \Lambda^{2}_{1} & \Lambda^{2}_{2} \ldots & \Lambda^{2}_{m} & \Lambda^{2}_{m+1} & \Lambda^{2}_{m+2} \ldots & \Lambda^{2}_{m+n} \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ . & & & & & \\ \Lambda^{m}_{1} & \Lambda^{m}_{2} \ldots & \Lambda^{m}_{m} & \Lambda^{m}_{m+1} & \Lambda^{m}_{m+2} \ldots & \Lambda^{m}_{m+n} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc} \Lambda^{1}_{1} & \Lambda^{1}_{2} \ldots & \Lambda^{1}_{m} & 0 & 0 \ldots 0 \\ \Lambda^{2}_{1} & \Lambda^{2}_{2} \ldots & \Lambda^{2}_{m} & 0 & 0 \ldots 0 \\ . & & & & \\ . & & & & \\ . & & & & \\ \Lambda^{m}_{1} & \Lambda^{m}_{2} \ldots & \Lambda^{m}_{m} & 0 & 0 \ldots 0 \end{array}\right] \tag{46}$$

Ejemplo 3

Para la matriz [α] dada por:

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} a^{h}_{g} & a^{h}_{g'} \\ a^{h'}_{g} & a^{h'}_{g'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -8 & -9 & 4 & 0 & 5 \end{bmatrix} \tag{47}$$

h=1,2,3; h'=4,5
g=1,2,3; g'=4,5

aplicar la forma equivalente del teorema SG7 dada por la ecuación (45).

Solución:

Para la primera parte los cofactores Λ^{h}_{g} con h,g=1,2,3, son:

$$\Lambda^{1}_{1} = cof\alpha^{1}_{1} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -9 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -90 \tag{48}$$

$$\Lambda^{1}_{2} = cof\alpha^{2}_{1} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ -9 & 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -30 \tag{49}$$

Continuando de esta forma se llega a los resultados:

$$\begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -90 & -30 & -50 \\ 85 & -50 & -5 \\ -30 & -10 & 140 \end{bmatrix} \tag{50}$$

Procediendo de la misma manera para las componentes de A^h_g con h,g=1,2,3, se tiene:

$$A_1^1 = cofa_1^1 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -18 \tag{51}$$

$$A_2^1 = cofa_1^2 = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 \tag{52}$$

Para llegar finalmente con:

$$\begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{bmatrix} \tag{53}$$

Relacionando la ecuación (50) con la (53), se tiene:

$$\begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} = a_4^4 a_5^5 \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} \tag{54}$$

Para la segunda parte de la ecuación (45) los cofactores $\Lambda^h_{g'}$ para h=1,2,3 *y* g'=4,5, son:

$$\begin{bmatrix} A_4^1 & A_5^1 \\ A_4^2 & A_5^2 \\ A_4^3 & A_5^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{55}$$

Juntando las ecuaciones (54) y (55) se llega a los resultados dados por:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} = a_4^4 a_5^5 \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{bmatrix} \\ \& \\ \begin{bmatrix} A_4^1 & A_5^1 \\ A_4^2 & A_5^2 \\ A_4^3 & A_5^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{56}$$

Los resultados de la ecuación (56) son los mismos que los de las ecuaciones (36) y (37) encontradas anteriormente.

Por esta razón, es indiferente utilizar la forma generalizada de la ecuación (28), o la forma generalizada equivalente de la ecuación (45).

5. Conclusiones

Tanto el teorema SG7 como su generalización, y su generalización equivalente quedaron demostrados.

El teorema SG7 es útil para encontrar en forma más rápida los mxm cofactores de una cierta matriz [A] de orden $(m+n)$x$(m+n)$, en lugar de calcular el total de los $(m+n)$x$(m+n)$ cofactores, y de los cuales se extraen los mxm cofactores pedidos.

6. Referencias

[1] L.I. Golovina, *Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones.* Ed. MIR, Moscú, 2ª ed. 1980.

[2] Kolman, *Álgebra lineal.* Ed. Sistemas Técnicos de Edición, SA de CV, México, DF, 1986.

[3] A. J. McConnell. *Aplications of Tensor Analysis.* Ed. Dover Publications, Inc., New York. USA, 1957.

[4] I.S.Sokolnikoff. *Análisis tensorial.* Ed. Limusa, México, DF, 1976.