

Diseño óptimo de estructuras tridimensionales para techos

Optimal design of three-dimensional structures for roofs

Maximino Tapia*, Salvador Botello*, Luz Angélica Caudillo*, Héctor Hernández*, Iván Munguía*, Jacob Esaú Salazar*, Ernesto Ortega*, Juan Carlos Gómez**, Daniel Quiroz**, Miguel Yáñez**

RESUMEN

Se presenta un laboratorio virtual que realiza el análisis, diseño y optimización de estructuras de acero rolado en frío, así como la cuantificación de los materiales utilizados en la construcción de la techumbre completa y el costo de fabricación e instalación la misma. El software está dotado con una interfaz de usuario amigable desarrollado para la empresa "Tejas El Águila". El análisis estructural considera cargas de peso propio, muertas y vivas, a las que estará sometida la estructura en condiciones de servicio, además de considerarse los efectos de viento y sismo para la República Mexicana -de acuerdo a la normatividad vigente. El optimizador está basado en métodos de minimización de entropía con restricciones múltiples, evaluando cada una de las estructuras por el método de la rigidez. Para la evaluación de la eficiencia de la estructura, se utiliza la normativa *American Iron and Steel Institute- Allowable Stress Design* (AISI-ASD). La optimización de las estructuras se realiza haciendo múltiples evaluaciones de diferentes configuraciones de las mismas, tarea que se ha paralelizado utilizando técnicas de programación de memoria compartida *Open Multiprocessing* (OpenMP). La combinación adecuada del seguimiento de las normativas vigentes, la implementación del optimizador y los métodos matriciales para el cálculo de estructuras, aunado al ambiente gráfico fácil de usar y amigable, han resultado en un potente software que genera soluciones de vivienda económicas, seguras y estéticas (favoreciendo así a un amplio sector de la sociedad mexicana).

ABSTRACT

It is presented a virtual laboratory that performs the analysis, design and structure optimization of cold rolled steel. It also performs the quantification of the materials used in the construction of the whole roof and the manufacturing and installation costs. The software is equipped with a friendly user interface developed for the company "Tejas El Águila". The structural analysis considers dead and alive weight loads that the structure will be subjected to, considering also the effects of wind and earthquake in Mexico -according to the present regulations. The optimizer is based on entropy minimization methods with multiple restrictions evaluating each of the structures by the rigidity method. The standard American Iron and Steel Institute-Allowable Stress Design (AISI-ASD) is also used for the evaluation of the efficiency of the structure. The optimization is performed by multiple evaluations of different configurations of the structure. This task has been parallelized using programming techniques of shared memory Open Multiprocessing (OpenMP). The right combination of existing normativity, implementation of the optimizer and matrix methods for the calculation of structures, coupled with user-friendly graphical interface, have resulted in a powerful software that creates affordable, safe and aesthetic housing solutions (favoring a broad sector of Mexican society).

Recibido: 7 de junio de 2012
Aceptado: 17 de octubre de 2012

Palabras clave:

Optimización; estructuras; rolado en frío.

Keywords:

Optimization; structures; cold rolling.

INTRODUCCIÓN

En años recientes, el uso de acero rolado en frío para la construcción de pequeñas y medianas edificaciones ha ido en aumento debido a la versatilidad tanto en la producción como en el transporte de este material. Existe en el mercado una amplia gama de calibres, espesores, tipos de recubrimiento y anchos de bobina disponibles; esto da como resultado una amplia variedad

*Centro de Investigación en Matemáticas A. C. (CIMAT). Callejón Jalisco s/n, Mineral de Valenciana, C. P. 36240, Guanajuato, Gto., México. Tel. 473 73-27155. Correo electrónico: max@cimat.mx, botello@cimat.mx, munguia@cimat.mx, jacobes@cimat.mx, ortegae@cimat.mx

** Lproba El Águila, S. A. de C. V. Estación FFCC La Trinidad s/n, Camino a Sta. Ana del Conde, León, Guanajuato, México. C. P. 37680. Correo electrónico: direccion.adjunta@tejaselaguila.com.mx

de configuraciones geométricas para la generación de vigas y columnas utilizadas comúnmente en edificaciones. La elección de la estructura más eficiente, aunada a la correcta selección de las barras a utilizar, presenta un nicho de oportunidad que repercute en un considerable ahorro económico (siempre garantizando la seguridad estructural y la funcionalidad de la estructura resultante). Una ventaja adicional de este sistema constructivo es que, al utilizar teja de barro sobre una estructura que puede aislarse térmicamente, produce una edificación que en su interior puede mantener la temperatura con bajo costo energético (es decir, puede mantenerse fresca en verano y cálida en invierno sin gastos excesivos en equipos de enfriamiento o calefacción según sea el caso).

Es por las razones anteriores que la empresa mexicana "Tejas El Águila" y la Gerencia de Desarrollo de Software del Centro de Investigación en Matemáticas A. C. (CIMAT) han impulsado la creación de un software de cálculo de estructuras metálicas que genere soluciones a problemas estructurales muy variados en forma rápida y confiable con el fin de ofrecer un producto estructural económico y seguro.

MATERIALES Y MÉTODOS

Metodología de cálculo

En esta sección se describe la metodología de cálculo del sistema estructural que conforma uno de los principales ejes de este proyecto. Se comenzará por mencionar que el programa calcula la estructura seleccionada -según las características geométricas elegidas por el usuario- y las cargas de peso propio (muerta y viva) -según el Reglamento de Construcción y Edificación del Distrito Federal [1]- a las que estará sometida la estructura en condiciones de servicio. Además, se consideran efectos de viento y sismo para la República Mexicana de acuerdo a la normatividad de la CFE [2].

Una vez obtenidas las cargas de servicio a las cuales estará sometida la estructura se procede a ejecutar el cálculo estructural por el método de la rigidez, considerando que los elementos que conforman la estructura trabajarán como barras dentro de la armadura. Como ya se ha mencionado, uno de los propósitos de este proyecto es el uso de elementos estructurales fabricados con acero rolado en frío. La normativa vigente para el diseño de dichos elementos metálicos para la República Mexicana, la *American Iron and Steel Institute-Allowable Stress Design (AISI-ASD)* [3, 4], es utilizada para la evaluación de la eficiencia de la estructura.

Metodología de optimización local

Las técnicas de búsqueda estocástica se han aplicado para resolver una gran variedad de problemas complejos de optimización combinatoria. La más antigua de ellas es probablemente el Recocido Simulado (SA, *Simulated Annealing*) [3] que genera una secuencia de soluciones combinando operaciones de mutación con un criterio de aceptación que se hace más estricto al incrementar el tiempo [6]. Otras técnicas como las Estrategias Evolutivas (EE) [7] y los Algoritmos Genéticos (AG) [8] también involucran una operación de mutación, pero ésta es aplicada a todos los elementos de la población, los cuales compiten unos con otros (en el proceso de selección) e intercambian información (como el caso de cruzamiento en los AG).

El problema general que se está resolviendo es el siguiente: dado un espacio de estados $\Omega = Q_1 \times Q_2 \times Q_3 \times \dots \times Q_n$ -donde cada Q_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$ es un conjunto de tamaño finito que evoluciona hacia encontrar la mejor estructura en algún sentido- y dada una función $U: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ llamada "función de costo", se desea encontrar un vector solución $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_n^*)$ que minimice U globalmente. Dicho vector solución es el conjunto de elementos estructurales que, garantizando condiciones de servicio, dan la estructura de menor peso.

Los componentes básicos del algoritmo son una población $X = \{x^1, x^2, x^3, \dots, x^N\}$, es decir, un conjunto de estructuras en que cada una de éstas se halla formada por una serie ordenada de vectores $\mathbf{x}^i = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$; $i = 1, 2, 3, \dots, n$ representan los elementos estructurales sobre los que se aplican continuamente dos operadores: mutación y aceptación. A continuación se realiza una breve descripción de estos operadores.

Operador de mutación. Se define una familia de operadores de mutación con un parámetro $M_\mu: \Omega^N \rightarrow \Omega^N$ por medio del algoritmo descrito a continuación:

Para cada elemento x de la población construir un elemento tal que

$$y_i = r_i \text{ con una probabilidad } p(\mu, x, X),$$

$$y_i = x_i \text{ con una probabilidad } 1 - p(\mu, x, X),$$

donde r_i es el elemento seleccionado de forma aleatoria en Q_i con una probabilidad uniforme y $\mu \in [0, 1]$.

$$\text{Hacer } M_\mu(x) = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_N).$$

La probabilidad de mutación $p(\mu, x, X)$ puede ser uniforme (i.e. $p(\mu, x, X) = \mu$) o adaptativa según el valor

de aceptación de x . Se puede escribir la probabilidad adaptativa como [9]:

$$p(\mu, x, X) = \mu \frac{f_{\max} - f(x)}{f_{\max} - \bar{f}} \text{ si } f(x) > \bar{f}$$

$$p(\mu, x, X) = \mu \text{ si } f(x) \leq \bar{f},$$

donde f_{\max} y \bar{f} son el valor máximo y valor promedio respectivamente de la función de aceptación en la población X .

Operador de Aceptación. Para realizar la selección entre una población X y un candidato de la población mutada Y , se aplica el criterio de aceptación metrópolis a cada elemento de X y Y . Esto define una familia de operadores de aceptación $A_\beta : \Omega^N \times \Omega^N \rightarrow \Omega^N$, la cual es descrita a continuación:

Para todos los elementos

$$x^i \in X, M_\mu(x^i) = y^i \in Y \text{ con } i = 1, 2, 3, \dots, n:$$

$\Delta U = U(y^i) - U(x^i)$ si $\Delta U \leq 0$, entonces hacer $u^i = y^i$.

Si $\Delta U > 0$, hacer $u^i = y^i$ con probabilidad $e^{-\beta \Delta U}$.

Hacer $u^i = x^i$ con probabilidad $1 - e^{-\beta \Delta U}$.

$$\text{Hacer } A_\beta(X, Y) = \{u^1, u^2, u^3, \dots, u^M\}.$$

El algoritmo utilizado se define entonces por el sistema dinámico siguiente:

$$X^{(t+1)} = A_\beta \left(Y^{(t)}, M_\mu \left(Y^{(t)} \right) \right),$$

donde -en general- los parámetros β, μ pueden ser variables en el tiempo y la población $X^{(0)}$ puede ser inicializada en forma aleatoria.

La optimización de la estructura consiste en encontrar el tipo de sección transversal de cada elemento de un catálogo $C = \{e^1, e^2, e^3, \dots, e^M\}$, esto es, cada elemento de la población $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in X$ está compuesto de elementos en $C, x_i \in C, i = 1, 2, 3, \dots, n$. Lo anterior de tal forma que todas las tensiones que se encuentren sobre ella sean menores que un valor permisible, y el peso total de la estructura sea lo menor posible. La función de costo a ser minimizada es:

$$U(x) = \sum_{i=1}^n \left[\rho_{x_i} Z_{x_i} L_{x_i} + \lambda_1 (\delta \sigma_{x_i}) + \lambda_2 (\delta \theta_{x_i}) \right],$$

en que p, Z, L es el peso específico, la sección transversal de catálogo y la longitud del elemento x (e) respectivamente; $\delta \sigma$ es la cantidad de esfuerzo que excede el valor máximo permisible y $\delta \theta$ es la cantidad de desplazamiento de algún nodo que excede el valor máximo permisible. El factor λ_1 es un factor de penalización para el esfuerzo en exceso -en este caso, $\lambda_1 = 10\ 000$. El valor λ_2 en general es escalado en función del valor

-en este caso, $\lambda_2 = 1\ 000 \lambda_1$. Para mayores detalles del algoritmo, se remite al lector a los trabajos desarrollados previamente en CIMAT [10, 11].

Metodología de optimización global

Se realizó una optimización sobre varias formas estructurales como se indica a continuación.

1. Selección de tipos de estructuras. A partir de un catálogo de geometrías predefinido y en congruencia con el tipo de techo a construir, se forma un arreglo de tipos de estructuras a ser consideradas en la optimización.
 - Cada elemento del catálogo de geometrías es una forma diferente de construir el techo, como se ilustra en la parte superior de la figura 1 (Howe, Gable y Warren respectivamente).
2. Parámetros. Para cada tipo de estructura se forma una matriz de combinación de dos parámetros: el número de estructuras y el número de divisiones en cada estructura, siendo cada elemento de cada matriz un posible techo a construir.
3. Optimización. Para cada tipo y cada techo se realiza la optimización local descrita en la sección anterior. Esto es, optimizar el techo respecto a los tipos de perfiles y materiales
4. Selección del mínimo. Cuando concluyen cada una de las optimizaciones locales, se comparan los mínimos por tipo de estructura y se selecciona el mínimo total como el techo óptimo.

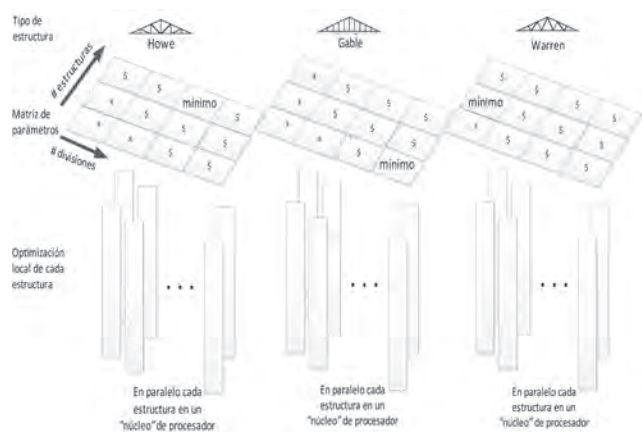


Figura 1. Esquemización de la optimización global.

Paralelización del algoritmo

Como ya se mencionó, se requiere hacer un número muy elevado de evaluaciones de techos (número de tipos \times número de estructuras \times número de divisiones) para encontrar el techo óptimo. Dicha evaluación se realiza con diversas geometrías, las cuales, a su vez, tienen diferencias en cargas (ya sea por cambios en las áreas tributarias de cargas que actúan sobre ellas, o bien por cambios del peso propio de las barras que la conforman). Existen varias formas de realizar la paralelización con *Open Multi-processing* (OpenMP), por ejemplo, paralelizando los algoritmos que resuelven el sistema de ecuaciones o paralelizando los cálculos completos del análisis de los techos. Para los fines de este trabajo, se optó por esta segunda opción ya que requiere menos intercambio de información en el sistema, esto es, se evalúa en cada núcleo de procesamiento un techo diferente (figura 1). El resultado de la evaluación indica si la estructura es factible o no y reporta su costo. La rutina maestra define si la estructura es aceptada o rechazada, además de generar y enviar una nueva estructura a evaluación. De esta forma, se tiene un conjunto de estructuras siendo evaluadas en forma paralela y una rutina independiente haciendo la búsqueda de la mejor estructura (respecto al costo del material). Esta manera de realizar la paralelización (cálculos completos en lugar de algoritmos individuales) permitiría sin muchas modificaciones ser implementada en una *Message Passing Interface* (MPI), sin embargo, dada la baja cantidad de barras que se tienen en estos problemas, no se recomienda su aplicación. Lo anterior debido a que el tiempo requerido para intercambiar información entre nodos es mucho mayor al tiempo de cálculo.

Interfase de usuario

Uno de los principales objetivos planteados para este proyecto fue generar un entorno de fácil uso, amigable con el usuario y con el cliente final. Otro aspecto importante al que se puso especial atención durante el desarrollo es que el uso de este programa no requiriera conocimientos avanzados en cálculo y diseño estructural.

El programa presentado funciona bajo un esquema que muestra paulatinamente varias plantillas: en cada una de ellas el usuario deberá ir introduciendo los datos requeridos, tanto para la cotización monetaria como para el cálculo estructural de cada proyecto.

En la figura 2 se presentan algunas pantallas que describen el proceso de introducción de datos. Algunos datos, además de ser utilizados para el proceso contable y de facturación, son también utilizados para el cálculo. Por ejemplo, la localidad y ubicación de la construcción se utiliza para determinar la velocidad máxima del viento en la región y el espectro de diseño sísmico de la estructura.



Figura 2. Algunas pantallas de la interfase de usuario para la introducción de datos en el sistema de cálculo de "Quinta Fachada". En el orden de arriba-abajo, derecha-izquierda: a) presentación del programa, b) datos del comprador, c) topografía y densidad urbana, d) número de aguas, e) tipo de estructura y f) tipos de tejas.

Una vez que el usuario ha ingresado al programa todos los datos necesarios, se procede al cálculo y optimización del sistema estructural (se explicará detalladamente más adelante), a la cotización monetaria y finalmente al despliegue de resultados.

RESULTADOS

El despliegue de resultados se divide en tres secciones: 1) reporte de insumos, 2) visualización 3D y 3) memoria de cálculo. Respecto a estas dos últimas utilidades del programa, se incluyen diagramas de fuerzas internas en cada una de las barras, porcentaje de eficiencia mecánica, configuración de las uniones de las barras y diagramas donde se muestran las longitudes reales y ángulos de corte de cada una de las barras. En la memoria de cálculo se detalla la configuración geométrica, ubicación geográfica, el proceso de cálculo y sus resultados, tanto en forma grafica como tabular. Es importante mencionar que este documento es requerido por las autoridades a cargo de la autorización de proyectos constructivos para otorgar el permiso de ejecución de obra. De esta suerte, este documento ha sido configurado para cumplir con los requerimientos de dichas entidades gubernamentales.

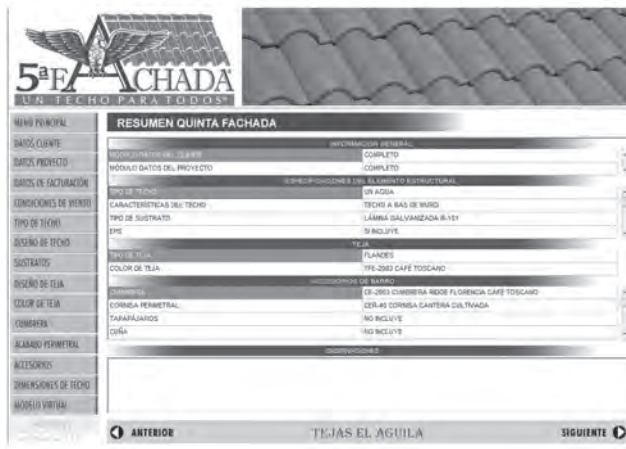


Figura 3. Resumen de resultados.

Elemento	Identificación	Longitud (m)	Área (m²)	Volumen (m³)	Peso (Kg)
Vertical	[1-2]	30051620-20	1.278	1.568	1.2368 (Kg/Mts.)
Diagonal	[1-3]	30051620-20	1.360	1.688	1.2368 (Kg/Mts.)
Vertical	[2-3]	30051620-20	0.465	0.571	1.2368 (Kg/Mts.)
Vertical	[2-4]	30051620-20	1.278	1.568	1.2368 (Kg/Mts.)
Diagonal	[3-4]	30051620-20	1.360	1.688	1.2368 (Kg/Mts.)
Superior	[3-5]	30051620-20	1.360	1.688	1.2368 (Kg/Mts.)
Vertical	[4-5]	30051620-20	0.930	1.141	1.2368 (Kg/Mts.)
Vertical	[4-8]	30051620-20	1.278	1.568	1.2368 (Kg/Mts.)
Diagonal	[5-6]	30051620-20	1.651	1.981	1.2368 (Kg/Mts.)
Superior	[5-7]	30051620-20	1.360	1.688	1.2368 (Kg/Mts.)
Vertical	[6-7]	30051620-20	1.205	1.712	1.2368 (Kg/Mts.)
Vertical	[6-8]	30051620-20	1.278	1.568	1.2368 (Kg/Mts.)
Diagonal	[7-8]	30051620-20	1.982	2.321	1.2368 (Kg/Mts.)
Superior	[7-9]	30051620-20	1.360	1.688	1.2368 (Kg/Mts.)
Vertical	[8-9]	30051620-20	1.361	2.283	1.2368 (Kg/Mts.)
CAMBIOS 0		20.005546	-24.579568	Total	

Figura 4. Resultados: desglose de la estructura.

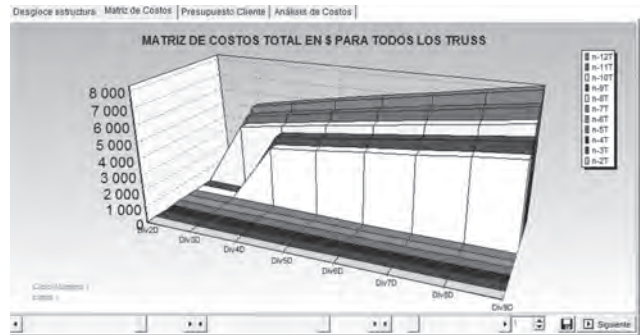


Figura 5. Resultados: matriz de costos.

ITEM	DESCRIPCIÓN	UNIDAD	CANTIDAD	PRECIO UNITARIO	PRECIO TOTAL
TRABAJOS	Trabaja de fijación generalizada con punta de brida de 1/2 x 3/4"	M²	10.00	118.88	1188.80
TORNILLOS	Tornillo Hexagonal Galvanizado de 1/4 x 1"	UN	32.31	5.00	1615.50
ACCESORIOS	Accesorios para conexión de tubo	UN	1225.00	0.80	980.00
PLACA	Placa para fijación de tornillos	UN	5.10	211.00	1076.10
ACEROS	Acero para estructura de acero	M³	175.00	5.00	875.00
ALUMINIO	Aluminio para estructura de aluminio	M³	1.00	1419.00	1419.00
ACEROS	Acero para estructura de acero	M³	1.00	1419.00	1419.00
ALUMINIO	Aluminio para estructura de aluminio	M³	1.00	1419.00	1419.00
ACEROS	Acero para estructura de acero	M³	1.00	1419.00	1419.00
ALUMINIO	Aluminio para estructura de aluminio	M³	1.00	1419.00	1419.00

Figura 6. Resultados: presupuesto detallado.

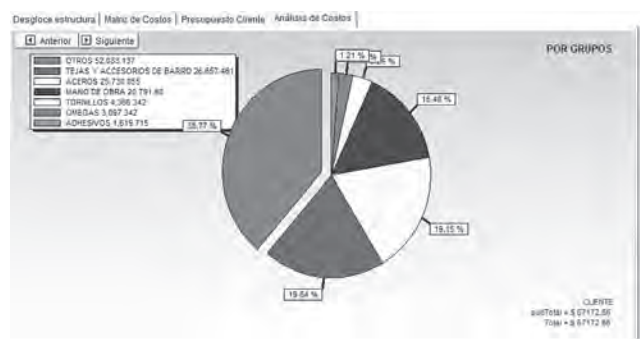


Figura 7. Resultados: análisis de costos.

Ejemplo de aplicación

Se muestran en esta sección algunas de las etapas del proceso de introducción de datos, cálculo estructural, optimización y presentación de resultados. La estructura en este ejemplo está diseñada para una cochera en la ciudad de León, Guanajuato, México, con una topografía urbana de densidad media. La estructura seleccionada es del tipo dos aguas no habitable, con

sustrato y Poliestireno Expandido (o EPS por sus siglas en inglés) para su aislamiento térmico, con teja tipo flandes de dimensiones 28 cm × 46,4 cm. Color café toscano. El techo incluye cornisa y canal en los lados especificados en la figura 8,1.

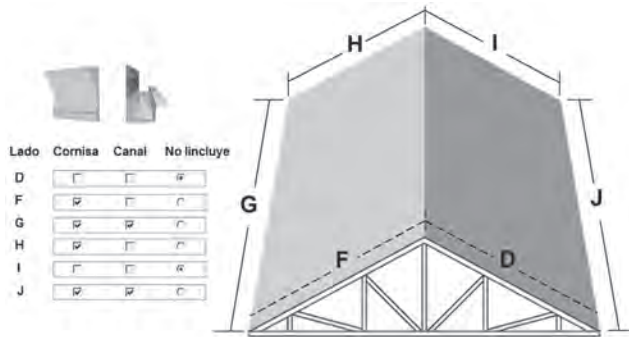


Figura 8,1. Colocación de cornisa y canal.

El techo tiene una fachada lateral de 7 m, con volado de 40 cm al frente y sin volados laterales, con un claro de 5 m (figura 8,2) y una altura de 1,82 m.

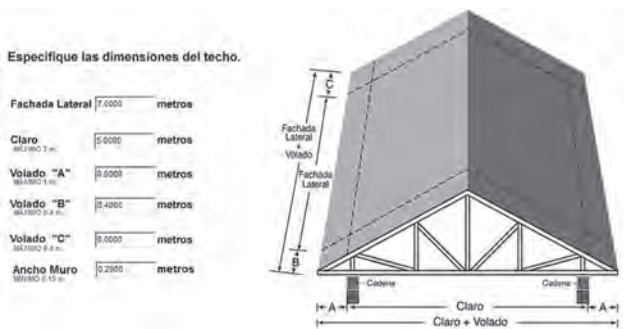


Figura 8,2. Dimensiones del techo.

En la figura 9,1 se presenta la estructura tridimensional que puede soportar las cargas, según las recomendaciones de los fabricantes del sustrato (soporte de la teja) y las reglas que se proponen en este tipo de sistema constructivo.

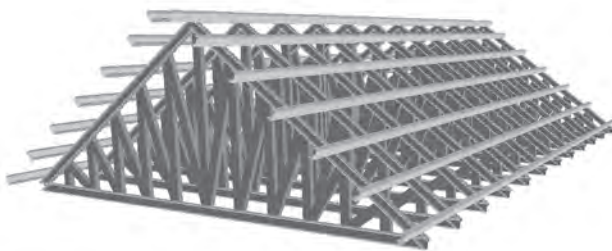


Figura 9,1. Estructura recomendada por los fabricantes de los materiales constructivos.

En este cálculo se considera las cargas vivas y muertas según el reglamento de la región en la República Mexicana donde se construirá la estructura. La figura 9,2 presenta la estructura óptima. Nótese que el software ha reducido considerablemente el número de barras que forman la estructura soporte.



Figura 9,2. Estructura óptima.

En la figura 10 se muestra la estructura soportada por columnas con los elementos constructivos que previamente ha seleccionado el usuario (como tipo de teja, sustrato, entre otros). Finalmente, en la figura 11 se muestra el diagrama de eficiencias en una de las armaduras que conforman la estructura metálica del sistema de techumbre.

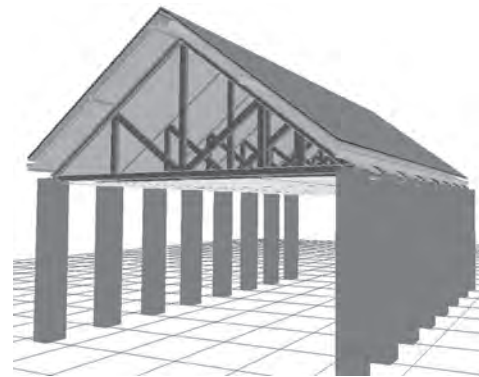


Figura 10. Vista general de la estructura y sus elementos con texturas.

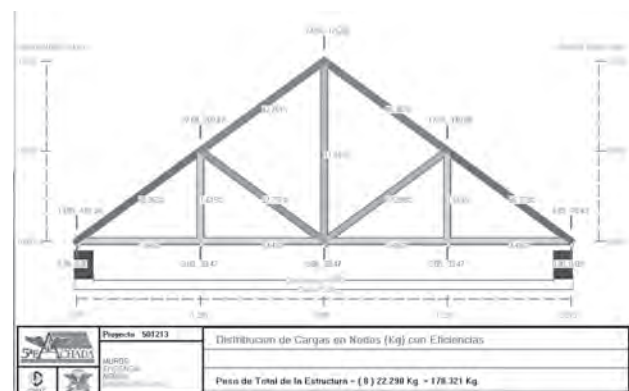


Figura 11. Diagrama de eficiencias en una de las armaduras que conforman la estructura metálica del sistema de techumbre.

Cabe mencionar que todas las figuras: colocación de cornisa y canal (8,1), dimensiones (8,2), armadura recomendada (9,1), armadura óptima (9,2), vista 3D (10) y eficiencias (11) fueron generadas y desplegadas por el software de cálculo desarrollado.

CONCLUSIONES

Como resultado de la interacción del grupo de trabajo en desarrollo de software del CIMAT y de la empresa "Tejas El Águila", se ha desarrollado un programa de cálculo y optimización de estructuras metálicas fácil de usar, de interfase amigable, versátil y confiable. Este software provee rápidamente la solución estructural más económica para cada caso particular, favoreciendo así a un amplio sector de la sociedad mexicana. Hasta el momento se ha comprobado que el programa arroja soluciones seguras y confiables para la construcción de casa-habitación hasta naves industriales. Lo previo permite ampliar la oportunidad de desarrollo de este tipo de techumbres. Se muestra también que el desarrollo de tecnologías de optimización puede favorecer la oportunidad de negocio con pertinencia social. La versatilidad del programa permite techar estructuras complejas como las que se muestran en las fotografías de la figura 12. Estas imágenes corresponden al templo de San Agustín, el cual se encuentra localizado en el poblado de San Agustín, municipio de León, Gto., México. En la foto de la izquierda se ve la estructura sin techo y en la de la derecha la estructura techada. En la figura 13 se muestran algunas fotografías del proceso de instalación en las que pueden observarse las estructuras de acero rolado en frío.

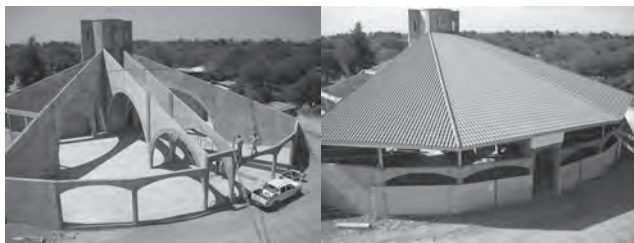


Figura 12. Aplicación real de software para diseño óptimo de estructuras de acero rolado en frío. Templo del poblado de San Agustín, en el municipio de León, Guanajuato, México.



Figura 13. Fotos del proceso constructivo del techo del Templo San Agustín en el municipio de León, Guanajuato, México.

REFERENCIAS

- [1] Asamblea de Representantes del Distrito Federal. (1993). Reglamento de construcciones para el Distrito Federal. *Diario Oficial de la Federación*. Disponible en: http://www.poi.ipn.mx/Documents/Normateca/reglamento/REGLAMENTO_DE_CONSTRUCCIONES_DISTRITO_FEDERAL.pdf
- [2] Comisión Federal de Electricidad. (2008). *Manual de Diseño de Obras Civiles*. Comisión Federal de Electricidad.
- [3] American Iron and Steel Institute. (2002). *North American Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members*. American Iron and Steel Institute.
- [4] Wei-Wen, Y. (2000). *Cold-formed Steel Design*. John Wiley and Sons, Inc.
- [5] Kirkpatrick, S., Gelatt, C. D. and Vecchi, M. P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science* 220(4598): pp. 671-680.
- [6] Fogel, L. J., Owens, A. J. and Walsh, M. J. (1966). *Artificial Intelligence through Simulated Evolution*. Wiley. New York.
- [7] Goldberg, D. E. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*. Addison Wesley Publishing.
- [8] Anily, S. and Federgruen, A. (1987). Simulated annealing methods with general acceptance probabilities. *J. Applied Prob.* 24: pp. 657-667.
- [9] Srinivas, M. and Patnaik, L. L. (1994). Adaptive probabilities of crossover and mutation in genetic algorithms. *IEEE Trans. on Syst., Man and Cyb.* 24(5): pp 656-667.
- [10] Botello, S., Marroquin, J. L., Oñate, E. and Horebeek, J. (1999). Solving structural optimization problems with genetic algorithms and simulated annealing. *Int. Jou. Num. Met. Eng.* 45: pp. 1069-1084.
- [11] Botello, S., Marroquin, J. L., Rionda, A. B. and Ducoing, R. (1997). *MECA Programa para el Análisis Matricial de Estructuras*. Facultad de Ingeniería Civil. Universidad de Guanajuato.