

## Mejorando la calidad de los métodos de solución para redes cíclicas de transporte de gas natural mediante técnicas de optimización

Improving the quality of the methods of solution for natural gas transporting cyclic networks through optimization techniques

Roger Z. Ríos Mercado\*

### RESUMEN

En este trabajo se estudia el problema de minimizar el consumo de combustible incurrido por las estaciones compresoras en un sistema de redes de transporte de gas natural en estado estable. En el mundo real, este tipo de instancias son muy grandes, en términos del número de variables de decisión y del número de restricciones tecnológicas, y muy complejas debido a la presencia de no linealidad y no convexidad en el conjunto de soluciones factibles y en la función objetivo. La contribución del presente trabajo consiste en ilustrar cómo un método de solución basado en técnicas avanzadas de optimización -como lo son la programación dinámica no secuencial y la descomposición de redes- puede emplearse para mejorar notablemente la operación de redes de transporte de gas natural, particularmente en sistemas cíclicos. Los resultados computacionales muestran la superioridad del método desarrollado al compararlo con el mejor trabajo existente, resultando en mejoras significativas en el ahorro de combustible.

### ABSTRACT

In this work, the problem of minimizing fuel consumption incurred by compressor stations in a natural gas pipeline system in steady state is addressed. In real life, this type of instances are very large, in terms of both number of decision variables and number of technological constraints, and very complex due to the presence of nonconvexity and nonlinearity in both the set of feasible solutions and the objective function to be minimized. The contribution of this work consists in illustrating how a solution method based on advanced optimization techniques, such as non-sequential dynamic programming and network decomposition, can be used to improve the operation of natural gas pipeline systems in cyclic topologies. The empirical work shows how the developed technique significantly outperforms the best existing method known to date, in terms of fuel consumption.

### INTRODUCCIÓN

En los últimos años, los sistemas de transporte de gas natural han crecido tanto en tamaño como en complejidad, lo cual implica también un crecimiento en la importancia de contar con una operación y planeación óptima de estas instalaciones. Los costos de inversión y gastos de operación de redes de gasoductos son tan grandes que hasta una pequeña mejora en la utilización del sistema puede significar un ahorro sustancial de dinero.

Los servicios de la industria de gas natural incluyen producción, movimiento y venta de gas. El principal interés en este estudio se enfoca en la fase de transporte de gas a través de una red de gasoductos. El movimiento de gas se divide en dos clases: transmisión y distribución. Transmisión o transporte de gas significa mover grandes volúmenes del fluido a presiones elevadas sobre distancias relativamente grandes desde fuentes de abastecimiento hasta centros de distribución. En contraste, la distribución de gas

Recibido: 10 de abril de 2011  
Aceptado: 5 de junio de 2012

#### Palabras clave:

Investigación de operaciones; sistemas de gasoductos; gas natural; preproceso; programación dinámica; descomposición de red.

#### Keywords:

Operations research; pipeline systems; natural gas; preprocessing; dynamic programming; network decomposition.

\*División de Posgrado en Ingeniería de Sistemas. Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica. Universidad Autónoma de Nuevo León. Av. Universidad s/n, Cd. Universitaria, San Nicolás de los Garza, Nuevo León, México, C. P. 66450.

es el proceso de encaminar dicho fluido a clientes individuales desde los centros de distribución. Para redes de transmisión y distribución, el gas fluye a través de varios dispositivos que incluyen ductos, reguladores, válvulas y compresores. En una red de transmisión, la presión del gas se va reduciendo a medida que éste viaja en el sistema, debido a la fricción con las paredes internas de los ductos. Las estaciones compresoras juegan el papel de incrementar la presión del gas para mantenerlo en movimiento.

En una red de transmisión, el costo total del sistema depende fuertemente del costo de operación de las estaciones compresoras en la red. El costo de operación de una estación compresora es usualmente medido por la cantidad de combustible consumido en la misma. Es bien conocido en el medio que el costo de operación de una estación compresora puede representar entre el 25 % y el 50 % del presupuesto total de operación de la compañía. Por tanto, uno de los objetivos primordiales es el de transportar el gas a través del sistema al menor costo posible, satisfaciendo naturalmente los requerimientos de demanda de los clientes y las restricciones tecnológicas propias del sistema.

Dependiendo de cómo el flujo de gas cambie con respecto al tiempo, se distingue entre sistemas en estado estable y sistemas en estado transiente. Se dice que un sistema se encuentra en estado estable cuando los valores que caracterizan el flujo de gas en el sistema son independientes (o con poca dependencia) del tiempo. En este caso, las restricciones del sistema que conforman al modelo matemático que representa el problema pueden describirse mediante ecuaciones y desigualdades algebraicas. En contraste, un análisis transiente requeriría el uso de ecuaciones diferenciales parciales para describir tales relaciones. Esto hace al problema prácticamente intratable desde la perspectiva de optimización. De hecho, la optimización de modelos transientes de gas es una de las áreas de oportunidad de investigación más retadoras en esta disciplina. Entre los trabajos recientes que han intentado abordar modelos de optimización en estado transientes, se destacan los de Ehrhardt y Steinbach [1], Mahlke, Martin y Moritz [2], Aalto [3] y Domschke y colaboradores [4]. Este trabajo se enfoca en problemas de transporte de gas en estado estable, con el objetivo de minimizar los costos de operación del sistema en su totalidad.

Los problemas de redes de transporte de gas difieren de los problemas de flujo de redes clásicos en algunos aspectos fundamentales. Primero, además de las variables de flujo en cada arco de la red (que en este caso representan tasas de flujo másico del gas),

se definen variables de presión del gas en cada nodo. Segundo, además de las restricciones típicas de balance nodal, existen otros dos tipos de restricciones: (i) restricciones no lineales de igualdad en cada ducto, las cuales representan la dinámica del flujo a través del ducto; (ii) un conjunto no lineal y no convexo que representa los límites de operación factible del flujo y las presiones de gas dentro de cada compresor. Tercero, la función objetivo está dada por una función no lineal y no convexa de flujos y presiones y mide la cantidad de combustible consumido en el sistema.

En general, un problema con estas características, aun en estado estable, es muy difícil de resolver. Más todavía, existen dos diferentes tipos de topologías de red: (i) no cíclicas, aquellas en que las estaciones compresoras ubicadas en el sistema no forman ciclos; (ii) cíclicas, aquellas en que las estaciones compresoras ubicadas en la red forman ciclos. Para redes del tipo no cíclico se han desarrollado varios trabajos entre los que se distinguen Wong y Larson [5], Lall y Percell [6], Mallinson y colaboradores [7], De Wolf y Smeers [8]. En cuanto a los trabajos enfocados en abordar topologías cíclicas, el mejor método conocido a la fecha es el desarrollado por Carter [9]. Para una descripción más amplia sobre los numerosos trabajos en algoritmos para problemas de optimización de gasoductos, el lector es referido al trabajo de Ríos-Mercado [10] y Zheng y colaboradores [11].

En este trabajo se ilustra el funcionamiento de una metodología de solución para el problema de minimizar el consumo de combustible en sistemas de transporte de gas natural con topologías cíclicas. La técnica de solución se basa en un procedimiento iterativo de dos fases. En una iteración dada, la primera fase consiste en fijar las variables de flujo y proceder a encontrar los valores óptimos de las variables de presión mediante el uso de la programación dinámica. En la segunda fase, con las variables de presión fijas, se intenta modificar las variables de flujo de tal forma que se mejore el valor de la función objetivo (consumo de combustible) mediante una explotación eficiente de la estructura matemática del problema y de sus propiedades teóricas. El procedimiento se compara contra el mejor trabajo existente conocido a la fecha en varias instancias del problema con datos reales. La evidencia empírica muestra categóricamente la superioridad del método propuesto al encontrar soluciones de mejor calidad que aquellas obtenidas con la otra técnica, es decir, soluciones que reportan un menor uso de combustible.

El resto de este trabajo está organizado de la siguiente forma. En la descripción del problema se introduce éste y se presenta la formulación matemática. Se

continúa con la descripción del método de solución propuesto en este trabajo. Posteriormente se presenta el trabajo experimental. Finalmente, se cierra con las conclusiones.

### Descripción del problema

Como todo problema de optimización, su formulación requiere de una función objetivo a optimizar y de un conjunto de restricciones tecnológicas que tomen la forma de ecuaciones y/o desigualdades. En este caso, la función objetivo del problema es la suma de todos los costos de cada una de las estaciones compresoras de la red. Este problema involucra además las siguientes restricciones tecnológicas: (i) balance de flujo másico en cada nodo, (ii) relación de dinámica del flujo en cada ducto, (iii) límites de presión en cada nodo y (iv) límites de operación en cada compresor.

Las primeras dos restricciones son comúnmente conocidas como las “ecuaciones de flujo en redes en estado estable”. Se enfatiza aquí que mientras las ecuaciones de balance de flujo (i) son lineales, las ecuaciones de flujo en los ductos (ii) son no lineales. Esta modelización ha sido muy bien documentada en Wu y colaboradores [12].

Las ecuaciones de flujo de red en estado estable pueden establecerse en una forma muy concisa mediante el uso de matrices de incidencia. Para ilustrar esto, se considera una red con  $n$  nodos,  $l$  ductos y  $m$  estaciones compresoras. A cada ducto se le preasigna una dirección. Sea  $A_l$  la matriz  $n \times l$  cuyos elementos están dados por  $a_{ij}^l = 1$  si el ducto  $j$  sale del nodo  $i$ ,  $a_{ij}^l = -1$  si el ducto  $j$  entra al nodo  $i$ ,  $a_{ij}^l = 0$  de otro modo. A  $A_l$  se le denomina “matriz de incidencia nodo-ducto”. Similarmente, sea  $A_m$  la matriz  $n \times m$  cuyos elementos están dados por  $a_{ik}^m = 1$ , si  $i$  es el nodo de descarga de la estación  $k$ ,  $a_{ik}^m = -1$  si  $i$  es el nodo de succión de la estación  $k$ ,  $a_{ik}^m = 0$  de otro modo. A  $A_m$  se le llama “matriz de incidencia nodo-estación”. Se denota por  $A$  a la matriz  $n \times (l + m)$  formada por  $A = (A_l, A_m)$ .

Sean  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_l)^T$  y  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_m)^T$  vectores que representen la tasa de flujo a través de los ductos y estaciones, respectivamente. Sea  $\mathbf{w} = (\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T)^T$ . Un componente  $u_j$  ó  $v_k$  es positivo si la dirección del flujo coincide con la dirección preasignada del arco, y negativo de otro modo. Sea  $p_i$  la presión en el nodo  $i$ ,  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)^T$  y  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n)^T$  el vector fuente o de flujos netos, donde la fuente  $s_i$  en el nodo  $i$  es positiva (negativa) si el nodo es un nodo proveedor (demanda). Un nodo que no es ni proveedor ni demanda se denomina “nodo de paso” y tiene flujo neto  $s_i = 0$ . Se supone, sin pérdida de generalidad, que la suma de todas las fuentes es igual a cero:

$$\sum_{i=1}^n s_i = 0 \quad (1)$$

Las ecuaciones de flujo en redes pueden ahora establecerse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} A\mathbf{w} &= \mathbf{s} \\ A_l^T \mathbf{p}^2 &= \mathbf{f}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{p}^2 = (p_1^2, \dots, p_n^2)^T$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = (f_1(u_1), \dots, f_l(u_l))^T$ , con  $f_j(u_j) = c_j |u_j| u_j$  ( $a = 1$ ) representando la ecuación de flujo en el ducto  $j$ .

Supóngase ahora que el vector fuente  $\mathbf{s}$  satisface la condición (1) y que las cotas de presión inferior  $\mathbf{p}^L$  y superior  $\mathbf{p}^U$  están dadas en cada nodo. El problema consiste en determinar el vector de presiones  $\mathbf{p}$  y al vector de flujos  $\mathbf{w}$ , de tal forma que se minimice el consumo total de combustible. Esto es,

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & F(\mathbf{w}, \mathbf{p}) = \sum_{k=1}^m g_k(v_k, p_{in(k)}, p_{out(k)}) \\ \text{sujeta a} \quad & A\mathbf{w} = \mathbf{s} \\ & A_l^T \mathbf{p}^2 = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \\ & \mathbf{p} \in [\mathbf{p}^L, \mathbf{p}^U] \\ & (v_k, p_{in(k)}, p_{out(k)}) \in D_k \end{aligned} \quad (2)$$

donde  $v_k$ ,  $p_{in(k)}$  y  $p_{out(k)}$  son la tasa de flujo másico, presión de succión y presión de descarga en la estación  $k$ , respectivamente. Es decir,  $in(k)$  y  $out(k)$  denotan los índices asociados con los nodos que definen a la estación  $k$ . La función  $g_k$  es la correspondiente función de consumo de combustible y  $D_k$  es el dominio factible de operación en la estación  $k$ . Véase Wu y colaboradores [12] para un estudio más profundo de la estructura y propiedades de  $D_k$  y  $g_k$ . En general, un problema con estas características es sumamente difícil de resolver. Por tanto, lo que aquí se propone es una técnica para resolver efectivamente este problema en sistemas cíclicos.

### MATERIALES Y MÉTODOS

El procedimiento de solución que se expone se basa en un esquema iterativo de dos etapas. En una iteración dada, la primera etapa, las variables de flujo se fijan y se aplica la Programación Dinámica No secuencial (NDP, por sus siglas en inglés) para encontrar los valores óptimos de las presiones nodales al flujo dado. En una segunda etapa, con las variables de presión fijas, se intenta modificar las variables de flujo de tal forma que se mejore la función objetivo del problema. Para esta segunda etapa se explota la inherente estructura de red y propiedades del problema. Los detalles de la implementación de NDP pueden encontrarse en [13].

Ahora bien, en la segunda fase de la iteración dada, una vez que los flujos están establecidos, se procede a encontrar un mejor valor para el vector de flujos con la intención de mejorar el valor de la función objetivo. Para llevar a cabo esta etapa, se desarrolló un procedimiento de técnica de descomposición, el cual explota favorablemente la estructura matemática del problema. Por razones de espacio, se omiten los detalles de la implementación, aunque ésta puede encontrarse en [14].

### Experimento

En esta sección se provee de una evaluación computacional de la metodología propuesta. Para tal propósito, se ha generado instancias del problema usando datos de compresores reales facilitados por la industria. Para las topologías de red, se construyeron estructuras similares a las encontradas en la industria. Los valores de todos los datos y parámetros utilizados en este experimento se toman de la base de datos de Kim [15].

El experimento consiste en realizar una comparación contra el mejor método en la actualidad (que es la NDP desarrollada por Carter [9]). Se presenta una evaluación numérica del procedimiento desarrollado sobre una variedad de instancias de redes cíclicas. El propósito primordial es mostrar que el procedimiento propuesto es capaz de obtener soluciones de considerable mejor calidad que las encontradas con los métodos que se usan hoy en día para resolver este problema.

El algoritmo consiste aproximadamente de 15 000 líneas de código escrito en lenguaje C. Las pruebas fueron ejecutadas en un servidor Power Challenge de Silicon Graphics bajo el sistema operativo IRIX 6.2.

Aun cuando el procedimiento propuesto puede resolver problemas con estructuras no cíclicas, la verdadera contribución científica del trabajo es la de mejorar considerablemente la solución de instancias cíclicas. Por ende, el estudio se concentra en este tipo de instancias.

Para llevar a cabo esta investigación, se consideran tres diferentes tipos de topologías:

- (A) estructura con ciclo sencillo de 6 estaciones compresoras,
- (B) estructura multi-cíclica de 3 ciclos, 3 ramas y 21 estaciones compresoras,
- (C) y estructura multi-cíclica de 4 ciclos, 1 rama y 17 estaciones.

Los datos de estas instancias se encuentran reportados en Kim [15]. Estas estructuras son lo suficientemente complejas para retar a cualquier método de solución y representan escenarios típicos de problemas reales. Para cada uno de estos tres tipos, se evaluaron tres instancias; cada una de éstas correspondiendo a diferentes valores del flujo inicial factible (con lo cual se tiene nueve instancias en total).

En esta parte del experimento, se efectuó una comparación entre la solución encontrada por el mejor método conocido a la fecha que es la NDP de Carter [9] y la encontrada por el método ofrecido. Para capturar mejor el sentido de la comparación, se describirá la forma en que actualmente se encuentra una solución por el método convencional en la práctica. Primero, como la NDP opera sobre un valor de flujos dados, el usuario propone -basado en la experiencia y en consideraciones prácticas- un cierto nivel de flujo de gas en las estaciones compresoras. Una vez que se hace esto, se calculan los valores de los niveles de flujo en los ductos usando las ecuaciones del modelo. Finalmente, la técnica de NDP de Carter [9] se aplica (operando en los flujos fijos) para obtener un conjunto de presiones óptimas. Esta es la solución reportada por dicho método. En lo propuesto, se hace un trabajo adicional por modificar los flujos y, por ende, se pueden encontrar soluciones de mejor calidad. Dada la forma en que se deriva el procedimiento planteado, es claro que la solución no puede ser de ninguna forma de peor calidad que la solución del método existente. Así, la investigación consiste en determinar si hay mejora y, de haberla, qué tan significativa es con respecto a la del otro método. Desde luego, otro fin es determinar cuánto cuesta encontrar dicha mejora, es decir, cuánto recurso computacional adicional hay que invertir en lograr ésta.

La tabla 1 resume los resultados de esta evaluación. La primera columna indica el tipo de topología y la segunda la instancia probada. La tercera columna indica el tiempo adicional que le tomó al método encontrar la solución, y la cuarta columna indica la mejora relativa en el valor de la calidad de la solución (valor de la función objetivo, es decir, consumo de combustible) que se obtuvo con el método ofrecido con relación al mejor método existente (la NDP). En esta columna, el 0,0 % significa que es algoritmo termina en la primera iteración porque no pudo detectar ciclos negativos y, en consecuencia, no pudo obtener una mejor solución. Por ejemplo, el valor de 8,20 % en la última fila significa que el método encontró una solución que mejora en un 8 % la solución encontrada por la NDP, es decir, una reducción de un 8 % en el consumo de combustible.



Como puede verse, los resultados son impactantes. La mejora en la calidad de la solución varía en un rango de un 3,34 % a un 41,77 % (en 7 de las 9 pruebas). Se evidencia el impacto del resultado si se menciona que se estima que una mejora marginal de un 1 % del gas transportado puede traducirse en varios millones de dólares de ahorro (al considerar las tremendas cantidades de gas que se mueven anualmente en un sistema de gasoductos).

Tabla 1.  
Resultados del método propuesto.

Tipo de estructura	Instancia	Tiempo de CPU (s)	Mejora relativa (%)
A	A1	2,64	24,88
	A2	4,57	21,13
	A3	20,24	41,77
B	B1	6,07	0,00
	B2	6,20	0,00
	B3	23,84	17,32
C	C1	41,17	4,62
	C2	42,75	3,34
	C3	74,46	8,20

## CONCLUSIONES

En este estudio se confrontó el problema de minimización de consumo de combustible en una red de gasoductos en estado estable. Se ha modelado matemáticamente el problema como un problema de flujo en redes no lineal y no convexo. Se menciona también los fundamentos teóricos de una metodología de solución basada en la teoría de flujo en redes y en una explotación efectiva de la estructura matemática del problema. En particular, el método propuesto aborda exitosamente el caso especial de redes con topologías cíclicas, las cuales, como se sabe en el medio, poseen el grado más alto de dificultad para ser resueltas.

Todo lo anterior motivó la implementación computacional de un procedimiento de optimización basado en una combinación de la técnica de programación dinámica no secuencial y la modificación de flujos con técnicas de descomposición de red que toman amplia ventaja de las propiedades de la misma. Ello constituye la contribución científica medular del trabajo. Como se pudo comprobar en la labor experimental, el procedimiento presentado provee soluciones de mejor calidad que las encontradas por los métodos actuales, es decir, reducciones notables en el consumo de combustible (representando un avance significativo en el estado del arte en esta área del conocimiento).

Entre las líneas de investigación a futuro, se destaca primordialmente tres: (a) desarrollo de heurísticas para encontrar soluciones factibles de alta calidad, (b) desarrollo de técnicas de optimización global, las cuales son metodologías más sofisticadas enfocadas a encontrar soluciones óptimas globales a problemas no convexos como el aquí tratado, y (c) estudio de algunos casos especiales del problema tratado (como lo es el considerar adicionalmente variables de decisión del tipo discreto que indican cuántas unidades compresoras estarán en operación en cada estación). Esto convierte al problema en un modelo de programación no lineal entero mixto, el cual es aún mucho más retador.

## AGRADECIMIENTOS

La presentación de este trabajo fue mejorada gracias a las observaciones de dos revisores anónimos. Este trabajo de investigación ha sido apoyado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT, apoyos n. I32827-A y J33187-A), el Programa de Apoyo a la Investigación Científica y Tecnológica de la Universidad Autónoma de Nuevo León (PAICYT, apoyos n. CA363-00, CA555-01 y CA820-04), la National Science Foundation de EUA (apoyo n. DMI-9622106) y la Texas Higher Education Coordinating Board bajo su Programa de Investigación Avanzada (apoyo n. 999903-122).

## REFERENCIAS

- [1] Ehrhardt, K. and Steinbach, M. C. (2005). Nonlinear optimization in gas networks. En Bock, H. G., Kostina, E., Phu, H. X. and Rannacher, R. (editores). *Modeling, Simulation and Optimization of Complex Processes*. Springer. Berlin, Alemania: pp. 139-148.
- [2] Mahlke, D., Martin, A. and Moritz, S. (2007). A simulated annealing algorithm for transient optimization in gas networks. *Mathematical Methods of Operations Research* 66(1): pp. 99-115.
- [3] Aalto, H. (2008). *Optimal Control of Natural Gas Pipeline Networks: A Real-Time, Model-Based, Receding Horizon Optimisation Approach*. VDM Verlag. Saarbrücken, Alemania.
- [4] Domschke, P., Geißler, B., Kolb, O., Lang, J., Martin, A. and Morsi, A. (2011). Combination of nonlinear and linear optimization of transient gas networks. *INFORMS Journal on Computing* 23(4): pp. 605-617.
- [5] Wong, P. J. and Larson, R. E. (1968). Optimization of natural-gas pipeline systems via dynamic programming. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-13(5): pp. 475-481.
- [6] Lall, H. S. and Percell, P. B. (1990). A dynamic programming based gas pipeline optimizer. En Bensoussan, A. and Lions, J. L. (editores). *Analysis and Optimization of Systems. Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Vol. 144. Springer-Verlag. Berlin: pp. 123-132.
- [7] Mallinson, J., Fincham, A. E., Bull, S. P., Rollett, J. S. and Wong, M. L. (1993). Methods for optimizing gas transmission networks. *Annals of Operations Research* 43(1-4): pp. 443-454.

- [8] De Wolf, D. and Smeers, Y. (2000). The gas transmission problem solved by an extension of the simplex algorithm. *Management Science* 46(11): pp. 1454-1465.
- [9] Carter, R. G. (1998). Pipeline optimization: Dynamic programming after 30 years. En *Proceedings of the 30th PSIG Annual Meeting*. Denver.
- [10] Ríos-Mercado, R. Z. (2002). Natural gas pipeline optimization. En Pardalos, P. M. and Resende, M. G. C. (editores). *Handbook of Applied Optimization*. Oxford University Press. New York: pp. 813-825
- [11] Zheng, Q. P., Rebennack, S., Iliadis, N. A. y Pardalos, P. M. (2010). Optimization models in the natural gas industry. En Rebennack, S., Pardalos, P. M., Pereira, P. M. and Iliadis, N. A. (editores). *Handbook of Power Systems I. Energy Systems*. Springer-Verlag. Berlín, Alemania: pp. 121-148.
- [12] Wu, S., Ríos-Mercado, R. Z., Boyd, E. A. and Scott, L. R. (2000). Model relaxations for the fuel cost minimization of steady-state gas pipeline networks. *Mathematical and Computer Modelling* 31(2-3): pp. 197-220.
- [13] Borraz-Sánchez, C. and Ríos-Mercado, R. Z. (2004). A non-sequential dynamic programming approach for natural gas network optimization. *Transactions on Systems* 3(4): pp. 1384-1389.
- [14] Ríos-Mercado, R. Z., Kim, S. and Boyd, E. A. (2006). Efficient operation of natural gas transmission systems: A network-based heuristic for cyclic structures. *Computers & Operations Research* 33(8): pp. 2323-2351.
- [15] Kim, S. (1999). *Minimum-Cost Fuel Consumption on Natural Gas Transmission Network Problem*. Tesis doctoral. Texas A & M University. EUA.