

## Análisis de Densidad de Energía en Placas Usando Métodos Aproximados

Luz Antonio Aguilera-Cortés\*, Agustín Leobardo Herrera-May\*\*\*, Maximino Antonio González-Palacios\*  
y José Colín-Venegas\*

### RESUMEN

En este trabajo se presentan tres soluciones aproximadas de la distribución de la densidad de energía en placas sujetas a excitaciones armónicas. Las soluciones son obtenidas considerando una aproximación de onda plana en la ecuación del flujo de energía en placas. Los métodos de Galerkin, mínimos cuadrados y Ritz son usados para resolver esta ecuación. La distribución de la densidad de energía es analizada en placas cuadradas de aluminio simplemente apoyadas con 1 m de longitud y 1 mm de espesor. Se consideraron dos diferentes frecuencias de excitación (239 Hz y 487 Hz) y cuatro magnitudes del factor de pérdida (0.01, 0.05, 0.10 y 0.20) en las placas. Los resultados obtenidos usando las soluciones aproximadas concuerdan aceptablemente con las soluciones exactas reportadas en la literatura con un error relativo menor del 10%. Además, las soluciones propuestas son sencillas y fáciles para usar en la predicción aproximada de la distribución de la densidad en energía en placas.

### ABSTRACT

This paper presents three approximate solutions for the energy density distribution in plates subject to harmonic excitations. These solutions are obtained considering a plane wave approximation in the energy flow equation in plates. Galerkin, least-squares, and Ritz methods are used to solve this equation. The energy density distribution is analyzed in simply supported square plates of aluminum with 1 m in length and 1 mm in thickness, respectively. Two excitation frequencies (239 Hz and 487 Hz) and four values of loss factors (0.01, 0.05, 0.10, and 0.20) in plates are considered. The results obtained using the approximate solutions agree well with exact solutions reported in the literature with a relative error lower than 10%. In addition, the proposed solutions are simple and easy to use in the prediction of the approximate-energy density distribution in plates.

Recibido: 5 de Mayo de 2009  
Aceptado: 28 de Agosto de 2009

### INTRODUCCIÓN

El análisis de flujo de energía en elementos estructurales de sistemas mecánicos es fundamental en la etapa de sus diseños acústico-estructurales. Estos diseños permiten predecir la disipación de energía de los elementos estructurales, el ruido generado por la vibración de la estructura y la interacción de la presión del sonido con respecto a la estructura (Aguilera-Cortés *et al.*, 2009). Actualmente, existen normas internacionales para regular los niveles de las emisiones de ruido en diferentes equipos mecánicos (Maling, 2007, p. 961). Los niveles de ruido, combinados con las vibraciones de los elementos estructurales de los sistemas mecánicos son factores que influyen en el nivel de confort de sus usuarios y en su competitividad comercial (Fan *et al.*, 2009, p. 58).

De esta forma, el conocimiento del comportamiento del flujo de energía en los elementos estructurales es necesario para predecir su comportamiento acústico-estructural y el nivel del ruido generado. Diseños de estructuras de automóviles, barcos, aviones y trenes constan en gran parte por placas. Por ende, es importante estimar el comportamiento del flujo de energía en placas sujetas a excitaciones externas, en las que excitaciones a altas frecuencias ocasionan ondas con longitudes relativamente cortas en relación al tamaño de las placas. Esto afecta a los modelos de los elementos finitos (FEM) tradicionales porque necesitan una discretización más fina en la estructura, la cual provoca un incremento significativo en el tiempo de cómputo (Desmet, 2002, p. 835). Además, la respuesta del sistema estructural

#### Palabras clave:

Densidad de energía; Método de Galerkin; Método de mínimos cuadrados; Método de Ritz.

#### Keywords:

Energy density; Galerkin method; Least-squares method; Ritz method.

\* Departamento de Ingeniería Mecánica, División de Ingenierías, Campus Irapuato-Salamanca, Universidad de Guanajuato. Salamanca, Gto., México. Correo electrónico: aguilera@salamanca.ugto.mx, maxg@salamanca.ugto.mx y colin@salamanca.ugto.mx

\*\* Centro de Investigación en Micro y Nanotecnología, Universidad Veracruzana, 94292, Boca del Río, Ver., México. Correo electrónico: leherrera@uv.mx.

es altamente sensible a cambios en las condiciones de frontera y ambientales (Bernhard y Huff, 1999, p. 295), siendo también el amortiguamiento un parámetro que afecta el flujo de energía en estructuras vibrantes (Pavic, 2005, p. 45).

El análisis estadístico de energía (SEA, Statistical Energy Analysis) es un método de predicción probabilística basado en la energía para conocer la interacción acústico-estructural de sistemas complejos en altas frecuencias (Lyon y Dejong, 1995). Los sistemas acústico-estructurales analizados con SEA son modelados como una composición de subsistemas (acoplamiento débil), en los que su respuesta dinámica es descrita en términos de los niveles de la respuesta de la energía promedio espacial y de la frecuencia para cada subsistema. SEA utiliza un tiempo computacional menor que modelos realizados con FEM, pero sólo puede aplicarse en altas frecuencias y está restringido a sistemas con bajo amortiguamiento y ligero acoplamiento (Wang y Bernhard, 2009, p. 426), limitando por tanto su aplicación en análisis acústico-estructurales.

Para resolver este problema, Wohlever y Bernhard (1992) y Bouthier y Bernhard (1993) obtuvieron ecuaciones diferenciales parciales para la distribución del flujo de energía promedio en barras, vigas y placas con resultados eficientes en altas frecuencias. En base a estas ecuaciones, el flujo de energía es fácil de predecir y puede ser implementado usando formulaciones del FEM con relativamente pocos elementos. Esta combinación es llamada el método de los elementos finitos de energía (EFEM), el cual utiliza modelos geométricos de elemento finitos disponibles para el análisis acústico-estructural a altas frecuencias, basado en las formulaciones establecidas por Wohlever y Bernhard (1992) y Bouthier y Bernhard (1993) junto a los métodos de acoplamiento desarrollados por Cho y Bernhard (1998). Estos modelos de EFEM son complementarios a los modelos del FEM a pequeñas frecuencias usando la base de datos del FEM (Bernhard y Wang, 2008, p. 288). Así, un modelo geométrico de elementos finitos puede ser aplicado a análisis de pequeñas y altas frecuencias, siendo posible obtener el flujo de energía de elementos estructurales de sistemas mecánicos para el diagnóstico y control de la propagación del ruido.

Se han aplicado satisfactoriamente técnicas de EFEM en estructuras complejas de cascos de barcos (Vlahopoulos *et al.*, 2005), en estudios de cabinas de equipo pesado (Wang y Bernhard, 1998 y 1999, p. 443) y en estructuras marinas (Vlahopoulos, Garza-Rios y

Mollo, 1999, p. 143). Además, Seong-Hoon, Suk-Yoon y Hyun-Gwon (2003) desarrollaron un método de análisis de flujo de energía para predecir la respuesta vibratoria en estructuras acopladas placa-viga en media y altas frecuencias. Una formulación de la densidad de energía y flujo de potencia en términos de amplitudes de onda para vigas y barras de longitud semi-infinita fue desarrollada por Pavic (2006). Recientemente, Yan (2008) reportó una nueva formulación para el análisis de elementos finitos de energía para modelar placas laminadas compuestas.

En este trabajo se proponen tres soluciones aproximadas simples para predecir rápidamente el comportamiento de la densidad de energía en placas con excitaciones externas a altas frecuencias. Estas soluciones fueron obtenidas con formulaciones del método de elementos finitos: Galerkin, mínimos cuadrados y Ritz, cuyos resultados concuerdan bien con los reportados por Bouthier y Bernhard (1993). Las soluciones propuestas son fáciles de implementar y pueden ayudar a diseñadores para estimar el comportamiento de la densidad de energía en elementos estructurales que contengan placas sujetas a excitaciones externas.

## ECUACIÓN DE DENSIDAD DEL FLUJO DE ENERGÍA

La ecuación diferencial del flujo de energía a través de un sistema homogéneo e isotrópico puede ser descrita con la siguiente expresión (Bernhard y Wang, 2008, p. 290) análoga a la ecuación de conducción de calor:

$$\frac{c_g^2}{\eta\omega} \nabla^2 e - \eta\omega e + \pi_{in} = 0, \quad (1)$$

donde  $c_g$  es la velocidad de grupo en el medio,  $e$  es la densidad de energía (energía por unidad de volumen),  $\pi_{in}$  es densidad de potencia de entrada (potencia por unidad de volumen),  $\omega$  es la frecuencia angular de la vibración del sistema y  $\eta$  es el factor de pérdida.

Bouthier (1992) demostró que para sistemas dimensionales de alto orden y considerando una aproximación de onda plana, la ecuación de flujo de energía es determinada por:

$$\frac{c_g^2}{\eta\omega} \left( \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} \right) - \eta\omega e + \pi_{in} = 0. \quad (2)$$

Esta ecuación es válida como una aproximación de la distribución del flujo de energía y puede ser aplicada para cualquier número y orientación de ondas planas. Para placas, las aproximaciones de ondas planas son válidas excepto en la región cercana a la fuente de excitación. En las uniones de estructuras, la densidad de energía uniforme es discontinua debido al cambio en el material y la geometría; por ende, es necesario especificar la condición de compatibilidad en términos de la densidad de energía local en la unión. Estas discontinuidades en la densidad de energía pueden ser modeladas usando aproximaciones que son consistentes con las ecuaciones de elementos finitos (Cho, 1993).

En el caso de un sistema estructural con dos miembros adyacentes conectados y con un tipo de onda propagándose en cada miembro, se tiene la siguiente relación entre el flujo neto de energía y las densidades de la energía (Cho, 1993):

$$dq_1 = \frac{\tau}{2r} (c_{g1}e_1dS_1 - c_{g2}e_2dS_2) \quad (3)$$

$$dq_2 = \frac{\tau}{2r} (-c_{g1}e_1dS_1 + c_{g2}e_2dS_2), \quad (4)$$

donde  $dq$  representa el flujo neto de energía sobre una área diferencial de la unión en un miembro de la estructura,  $\tau$  es el coeficiente de transmisión de potencia,  $dS$  es el área diferencial de la unión,  $r$  es el coeficiente de reflexión de potencia y los subíndices 1 y 2 se refieren a cada una de las dos placas interconectadas. Se observa que las ecuaciones del flujo de energía en las uniones de dos placas consideran solamente los coeficientes de

transmisión y reflexión de potencia y las propiedades de los materiales y geométricas.

## FORMULACIÓN CON FEM

La ecuación aproximada del flujo de energía en placas, combinada con las ecuaciones de acoplamiento entre dos placas, expresadas en la sección anterior, se obtienen mediante la formulación del FEM.

Usando la formulación de residuos pesados de Galerkin, la ecuación de energía para la aproximación de onda plana está dada por:

$$\int_D \Psi_{ij} \left( \frac{c_g}{\eta\omega} \nabla^2 c_g e - \frac{\eta\omega}{c_g} c_g e + \pi_{in} \right) dD = 0, \quad (5)$$

donde  $\Psi_{ij}$  es la función de peso (que para este caso es igual a la función de forma  $\varphi_{ij}$ ) y  $D$  representa el dominio (en este caso en las direcciones de los ejes  $x$  y  $y$ ).

La forma débil de la ecuación (5) es:

$$\int_S \Psi_{ij} \left( \vec{n} \cdot \frac{c_g}{\eta\omega} \nabla c_g e \right) dS - \int_D \left( \nabla \Psi_{ij} \cdot \frac{c_g}{\eta\omega} \nabla c_g e \right) dD - \int_D \Psi_{ij} \frac{\eta\omega}{c_g} c_g e dD + \int_D \Psi_{ij} \pi_{in} dD = 0 \quad (6)$$

donde  $\vec{n}$  es un vector normal al área transversal de la placa.

Para una aproximación de onda plana, el vector intensidad de energía  $\vec{I}$  es definido por (Bouthier, 1992):

$$\vec{I} = -\frac{c_g}{\eta\omega} \nabla c_g e. \quad (7)$$

Por ende,

$$\int_S \Psi_{ij} \left( \vec{n} \cdot \frac{c_g}{\eta\omega} \nabla c_g e \right) dS = - \int_S \Psi_{ij} (\vec{n} \cdot \vec{I}) dS. \quad (8)$$

Las funciones de forma de la variable dependiente  $c_g e$ , son obtenidas como:

$$c_g e = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_g e)_{ij} \varphi_{ij}. \quad (9)$$

Al sustituir la Ec. (9) en la Ec. (6) y considerando que la función de peso es igual a la función de forma, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones algebraicas

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n K_{ij} (c_g e)_{ij} = \Pi_{ij} + Q_{ij}, \quad (10)$$

donde:

$$K_{ij} = \int_D \left( \left( \nabla \Psi_{ij} \cdot \frac{c_g}{\eta \omega} \nabla \varphi_{ij} \right) + \frac{\eta \omega}{c_g} \Psi_{ij} \varphi_{ij} \right) dD, \quad (11)$$

$$\Pi_{ij} = \int_D \Psi_{ij} \pi_{in} dD, \quad (12)$$

$$Q_{ij} = - \int_S \Psi_{ij} (\vec{n} \cdot \vec{I}) dS = - \int_S \Psi_{ij} dq, \quad (13)$$

En la Ec. (13)  $dq$  está dado por:

$$dq = (\vec{n} \cdot \vec{I}) dS. \quad (14)$$

Finalmente, la ecuación matricial global de la Ec. (10) es definida como

$$[K] \{c_g e\} = \{II\} + \{Q\}, \quad (15)$$

donde la matriz  $[K]$  y el vector  $\{II\}$  modelan respectivamente la energía y su flujo de energía dentro de todos los miembros individuales de la estructura de placas.

Para considerar el acoplamiento entre placas (uniones) es necesario utilizar las relaciones entre el flujo neto de energía y las densidades de la energía en sus conexiones, las cuales son expresadas por la Ecs. (3) y (4). Por ende, la integral del flujo de energía en la frontera de las placas puede ser expresada como (Bernhard y Huff, 1999, p. 297):

$$Q_{ij} = - \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_g e)_{1ij} \int_{S_1} \frac{\tau}{2r} \Psi_{ij} \varphi_{ij} dS_1 + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_g e)_{2ij} \int_{S_2} \Psi_{ij} \varphi_{ij} dS_2. \quad (16)$$

Esta última ecuación puede expresarse en la siguiente forma matricial.

$$\{Q\} = -[J] \{c_g e\}. \quad (17)$$

Así, la ecuación matricial global que considera las discontinuidades en la unión entre placas es definida como:

$$[ [K] + [J] ] \{c_g e\} = \{II\} \quad (18)$$

En base a la Ec. (18) es posible analizar la densidad de energía en sistemas de placas acopladas. La matriz  $[K]$  es una combinación de las matrices de masa y rigidez y el vector  $\{II\}$  tiene la forma de un vector de fuerza. La matriz  $[J]$  es nula si no hay discontinuidades geométricas o cambios en las propiedades del material entre las dos placas. Aparte, de las formulaciones del FEM para resolver la Ec. (18) se pueden implementar otros métodos numéricos como el método de elemento frontera o el método de diferencias finitas.

## APLICACIONES

En esta sección se proponen tres soluciones aproximadas de la ecuación del flujo de energía en placas simplemente apoyadas mediante la utilización de los métodos de Galerkin, mínimos cuadrados y de Ritz. Estas soluciones contienen pocos términos y son implementadas en el software Matlab<sup>®</sup>. La ventaja de las soluciones aproximadas radica en el bajo costo computacional y en su facilidad de implementación usando la discretización por elementos finitos. Para esta discretización, es necesario elegir adecuadamente un número finito de funciones de forma para cada uno de los esquemas de residuos pesados.

A continuación, se utilizará la formulación descrita en la sección anterior para analizar la distribución de la energía en una placa simplemente apoyada como la que se muestra en la Figura 1, la cual está sometida a una excitación armónica que actúa en el centro de la placa sobre un área  $u \times v$ . Para el sistema bajo estudio, se considera que no existen discontinuidades ( $[J] = [0]$ ) y las condiciones de frontera (intensidad de energía igual a cero en las fronteras) se señalan en la Figura 2.

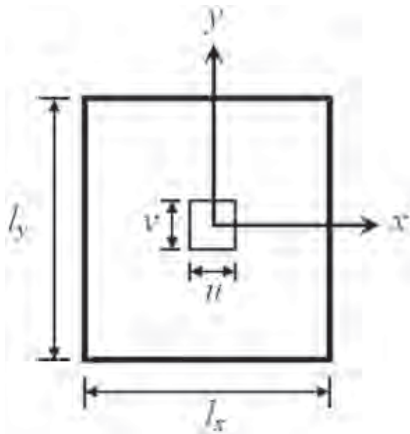


Figura 1. Dimensiones de la placa de aluminio simplemente apoyada.

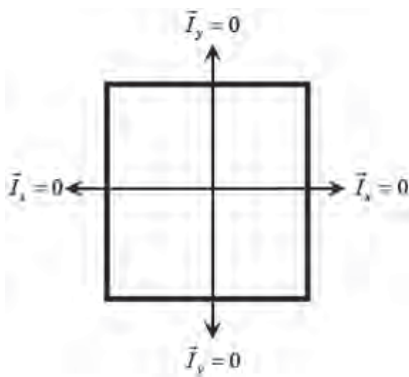


Figura 2. Condiciones de frontera, intensidad de energía nula en los extremos, para la placa de aluminio simplemente apoyada.

Para resolver la ecuación del flujo de energía en placas considerando una aproximación de onda plana, Ec. (2), se propone la siguiente solución de sumatoria de funciones cosenoidales:

$$c_g e = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cos^2 \left( \frac{i\pi x}{l_x} \right) \cos^2 \left( \frac{j\pi y}{l_y} \right), \quad (19)$$

donde  $l_x$  y  $l_y$  representan la longitud de la placa en la dirección de cada uno de los ejes  $x$  y  $y$ . Esta ecuación satisface las condiciones de fronte-

ra de intensidad de energía nula en las fronteras. Así, la ecuación de interpolación es representada por:

$$c_g e = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (c_g e)_{ij} \varphi_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \varphi_{ij}, \quad (20)$$

donde

$$\varphi_{ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \cos^2 \left( \frac{i\pi x}{l_x} \right) \cos^2 \left( \frac{j\pi y}{l_y} \right). \quad (21)$$

La siguiente expresión es obtenida al aplicar las condiciones de frontera a la placa (intensidad de energía nula en los extremos de la placa) en estudio:

$$Q_{ij} = - \int_S \Psi_{ij} (\vec{n} \cdot \vec{I}) dS = 0. \quad (22)$$

Al sustituir la Ec. (22) en la Ec. (18) se consigue la siguiente expresión matricial:

$$[K] \{c_g e\} = \{II\}, \quad (23)$$

donde la matriz  $[K]$  y el vector  $\{II\}$  son obtenidos de los coeficientes matriciales representados por las Ecs. (11) y (12). Para resolver esta ecuación se utilizan los métodos de Galerkin, mínimos cuadrados y el Ritz.

### SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE GALERKIN

Con el método de Galerkin, la función de peso es igual a la función de forma  $\Psi_{ij} = \varphi_{ij}$  y considerando que la densidad de potencia de entrada ( $\pi_{in}$ ) es una función cosenoidal similar a  $c_g e$ , entonces los coeficientes matriciales de la Ec. (23) están dados por:

$$K_{ij} = \frac{3}{16} \frac{\pi^2 c_g}{\eta \omega} \left[ i^2 \frac{l_y}{l_x} + j^2 \frac{l_x}{l_y} \right] + \frac{9}{64} \frac{\eta \omega}{c_g} l_x l_y, \quad (24)$$

$$\Pi_{ij} = \frac{64}{9} \frac{\Pi_{in}}{l_x l_y} \left\{ 3u + \frac{l_x}{2i\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{i\pi u}{l_x} \right) + \frac{l_x}{16i\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2i\pi u}{l_x} \right) \right\} \left\{ 3v + \frac{l_y}{2j\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{j\pi v}{l_y} \right) + \frac{l_y}{16j\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2j\pi v}{l_y} \right) \right\} \quad (25)$$

En base a las Ecs. (24) y (25) es posible obtener los componentes del vector de la distribución de la densidad de energía,  $\{c_g e\}$ , en una placa sujeta a una excitación externa.

### SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

En el método de mínimos cuadrados, la función de peso está definida por  $\Psi_{ij} = \partial R / \partial (c_g e)_{ij}$  y los parámetros  $(c_g e)_{ij}$  son determinados mediante la solución de la siguiente integral:

$$\int_D \frac{\partial R}{\partial (c_g e)_{ij}} R dD = 0, \quad (26)$$

donde  $R$  es el residuo. Para este caso,  $R$  es determinado como:

$$R = \frac{c_g}{\eta\omega} \nabla^2 c_g e - \frac{\eta\omega}{c_g} c_g e + \pi_{in}, \quad (27)$$

donde  $c_g e$  es una función cosenoidal dada por la Ec. (19).

Al resolver la Ec. (26) se obtiene un conjunto de ecuaciones algebraicas que pueden ser representadas en una ecuación matricial análoga a la Ec. (23). Entonces, usando el método de mínimos cuadrados se obtienen las siguientes componentes para la matriz  $[K]$  y el vector  $\{\Pi\}$

$$\begin{aligned} K_{ij} = & \frac{c_g^2 \pi^4}{\eta^2 \omega^2} \left\{ \frac{9l_y}{16l_x^3} i^4 - \frac{3l_y}{8l_x} \left( \frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right) i^2 (i^2 + j^2) - \frac{3l_x}{8l_y} \left( \frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right) j^2 (i^2 + j^2) + \frac{1}{8l_x l_y} i^2 j^2 + \right. \\ & \left. + \frac{9l_x l_y}{16} \left( \frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right) (i^2 + j^2) + \frac{9l_x}{16l_y^3} j^4 \right\} - \frac{3\pi^2 l_y}{16l_x} i^2 + \frac{9\pi^2 l_x l_y}{16} \left( \frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right) (i^2 + j^2) + \\ & + \frac{3\pi^2 l_x}{16l_y} j^2 + \frac{9\eta^2 \omega^2 l_x l_y}{64c_g^2} \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{ij} = & \frac{64\Pi_{in}}{9l_x l_y} \left\{ -\frac{2\pi^2 c_g}{l_x^2 \eta\omega} i^2 \left[ \frac{u}{8} - \frac{l_x}{16i\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2i\pi u}{l_x} \right) \right] \left[ \frac{3v}{8} + \frac{l_y}{2j\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{i\pi v}{l_y} \right) + \frac{l_y}{16j\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2j\pi v}{l_y} \right) \right] - \frac{2\pi^2 c_g}{\eta\omega} \left( \frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right) (i^2 + j^2) \left[ \frac{3u}{8} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{l_x}{2i\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{i\pi u}{l_x} \right) + \frac{l_x}{16i\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2i\pi u}{l_x} \right) \right] \left[ \frac{3v}{8} + \frac{l_x}{2j\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{j\pi v}{l_y} \right) + \frac{l_y}{16j\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2j\pi v}{l_y} \right) \right] + \frac{2\pi^2 c_g}{l_y^2 \eta\omega} i^2 \left[ \frac{3u}{8} + \frac{l_y}{2j\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{j\pi v}{l_y} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{l_y}{16j\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2j\pi v}{l_y} \right) \right] + \frac{2\pi^2 c_g}{l_y^2 \eta\omega} j^2 \left[ \frac{3u}{8} + \frac{l_x}{2i\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{i\pi u}{l_x} \right) + \frac{l_x}{16i\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2i\pi u}{l_x} \right) \right] \left[ \frac{v}{8} - \frac{l_x}{16i\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2j\pi v}{l_x} \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{c_g}{\eta\omega} \left[ \frac{3u}{8} + \frac{l_x}{2i\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{i\pi u}{l_x} \right) + \frac{l_x}{16i\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2i\pi u}{l_x} \right) \right] \left[ \frac{3v}{8} + \frac{l_y}{2j\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{j\pi v}{l_y} \right) + \frac{l_y}{16j\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2j\pi v}{l_y} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (29)$$

Sustituyendo los componentes de las Ecs. (28) y (29) en la ecuación matricial (23), se obtienen los coeficientes  $(c_g e)_{ij}$  de la Ec. (20) necesarios para obtener la densidad de energía en una placa sujeta a una excitación externa.

### SOLUCIÓN POR EL MÉTODO DE RITZ

Para este caso, el método de Ritz considera el funcional cuadrático de la forma débil de la Ec. (6), el cual se obtiene de la ecuación diferencial del flujo de energía en placas:

$$I(c_g e) = \frac{1}{2} \int_D \left\{ \frac{c_g}{\eta\omega} \left[ \left( \frac{\partial c_g e}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial c_g e}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\eta\omega}{c_g} (c_g e)^2 - 2\pi_{in} c_g e \right\} dD + \int_S c_g e dq, \quad (30)$$

donde  $I(c_g e)$  representa la energía potencial total en la placa.

Utilizando la solución aproximada de la densidad de energía en una placa dada por la Ec. (20) y sustituyéndola en la Ec. (30), se obtiene la siguiente expresión:

$$I(c_g e) = \frac{1}{2} \int_D \left\{ \frac{c_g}{\eta\omega} \left[ \left( \sum_{ij} (c_g e)_{ij} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \right)^2 + \left( \sum_{ij} (c_g e)_{ij} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\eta\omega}{c_g} \left[ \sum_{ij} (c_g e)_{ij} \varphi_{ij} \right]^2 - 2\pi_{in} \sum_{ij} (c_g e)_{ij} \varphi_{ij} \right\} dD + \int_S \sum_{ij} (c_g e)_{ij} \varphi_{ij} dq \quad (31)$$

Aplicando la derivada parcial de la Ec. (31) con respecto a  $(c_g e)_{ij}$  e igualando a cero la ecuación resultante, se obtiene la siguiente expresión matricial:

$$[B]\{c_g e\} = \{E\}. \quad (32)$$

La matriz  $[B]$  y el vector  $\{E\}$  tienen los siguientes componentes:

$$B_{ij} = \int_D \left\{ \frac{c_g}{\eta\omega} \left[ \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{ij}}{\partial y} \right] + \frac{\eta\omega}{c_g} \varphi_{ij} \varphi_{ij} \right\} dD, \quad (33)$$

y

$$E_{ij} = \int_D \pi_{in} \varphi_{in} dD. \quad (34)$$

En base a las condiciones geométricas de la placa de estudio se obtienen

$$B_{ij} = \frac{3}{16} \frac{\pi^2 c_g}{\eta\omega} \left[ i^2 \frac{l_y}{l_x} + j^2 \frac{l_x}{l_y} \right] + \frac{9}{64} \frac{\eta\omega}{c_g} l_x l_y \quad (35)$$

$$E_{ij} = \frac{64}{9} \frac{\pi_{in}}{l_x l_y} \left\{ \frac{3}{8} u + \frac{l_x}{2i\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{i\pi u}{l_x} \right) + \frac{l_x}{16i\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2i\pi u}{l_x} \right) \right\} \left\{ \frac{3}{8} v + \frac{l_y}{2j\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{j\pi v}{l_y} \right) + \frac{l_y}{16j\pi} \operatorname{sen} \left( \frac{2j\pi v}{l_y} \right) \right\} \quad (36)$$

donde  $u$  y  $v$  son las dimensiones del área donde se aplica la excitación externa en la placa (ver la Figura 1).

Sustituyendo las Ecs. (35) y (36) en la Ec. (32), se encuentran los componentes  $(c_g e)_{ij}$  que determinan la distribución de la densidad de energía en una placa sujeta a una excitación externa.

## CASOS DE ESTUDIO

Se analizó la distribución de la densidad de energía para una placa cuadrada simplemente apoyada de aluminio con 1 m de longitud y 1 mm de espesor, excitada por una fuerza armónica de 10 mN (la fuerza actúa sobre una área de  $0.1 \times 0.1 \text{ m}^2$  en el centro de la placa), como se muestra en la Figura 3. Las propiedades de la placa son: densidad de  $2700 \text{ kg/m}^3$ , módulo de Young de  $71 \text{ GPa}$  y módulo de Poisson de  $0.33$ . La excitación produce una potencia de entrada de  $1.48 \times 10^{-6} \text{ W}$ , la cual cambia conforme se propaga por la placa debido al factor de pérdida  $\eta$  y la frecuencia de excitación. Se estudiaron ocho casos de placas con dos diferentes frecuencias ( $239$  y  $487 \text{ Hz}$ ) para la fuerza de excitación, en los que se obtienen los efectos de la frecuencia angular  $\omega$  y el factor de pérdida  $\eta$  sobre el comportamiento de la distribución de la densidad de energía en cada placa. Para resolver la ecuación matricial (23) se implementó un algoritmo en el software Matlab<sup>®</sup>, en base a los resultados obtenidos por los métodos de Galerkin, mínimos cuadrados y Ritz. En los ocho casos, se utilizaron pocas iteraciones de la Ec. (20) para obtener resultados satisfactorios de la distribución de la densidad de energía en

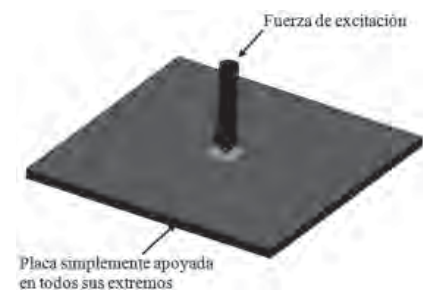


Figura 3. Placa cuadrada simplemente soportada de aluminio sujeta a una fuerza de excitación armónica, la cual actúa sobre un área de  $0.1 \times 0.1 \text{ m}^2$  en el centro de la placa.

la placa, que representa una disminución en el tiempo de cómputo y la utilización de expresiones sencillas de predicción de la densidad de energía en sistemas estructurales compuestos por placas. En el intervalo de comparación de los métodos utilizados, los resultados obtenidos por las soluciones aproximadas de este trabajo concuerdan aceptablemente con las soluciones exactas reportadas por Bouthier y Bernhard (1993), las cuales son más complejas y necesitan mayor tiempo de cómputo.

#### Casos a la frecuencia de 239 Hz

Se estudiaron cuatro casos a la frecuencia de excitación de 239 Hz y considerando diferentes factores de pérdida (0.01, 0.05, 0.10, 0.20) para la placa. Primero, se analizó la distribución de la densidad de energía en la placa excitada con 10 mN y  $\eta=0.01$  mediante la solución obtenida con el método de Galerkin y, posteriormente, se consideraron las soluciones derivadas de los métodos de mínimos cuadrados y de Ritz. La Figura 4 muestra la distribución de la densidad de energía aproximada en dB en la placa de estudio, donde se observa que la variación de la densidad de energía en la placa es mínima debido a que el amortiguamiento ( $\eta=0.01$ ) de la placa es muy pequeño.

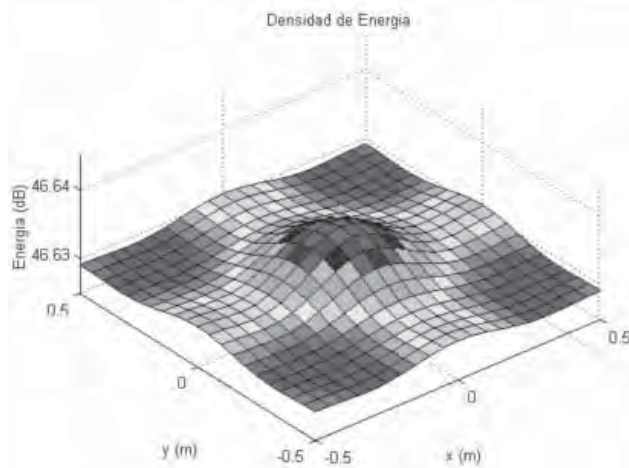


Figura 4. Distribución de la densidad de energía aproximada, obtenida con el método de Galerkin, en una placa de aluminio simplemente apoyada con  $\eta=0.01$  y  $f=239$  Hz.

En el segundo caso se incrementó el factor de pérdida a 0.05 y se obtuvo la correspondiente distribución de la densidad de energía, como se muestra en la Figura 5 (a). Este resultado muestra una distribución de la densidad de energía con un error relativo menor del 5 % con respecto al reportado por Bouthier y Bern-

hard (1993) para la misma excitación (10 mN) y factor de pérdida ( $\eta=0.05$ ) en la placa, como se muestra en la Figura 5 (b). Puede observarse que la disipación de la densidad de energía en este caso es mayor en los bordes de la placa en comparación con el anterior. La solución exacta presentada por Bouthier y Bernhard necesitó una sumatoria modal de 4900 modos, requiriendo mayor tiempo de cómputo.

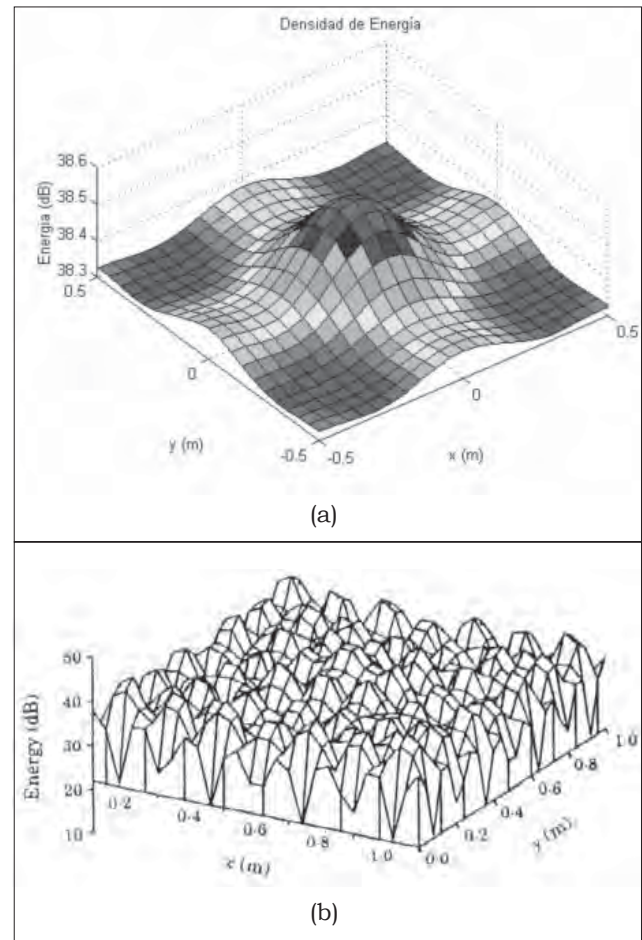


Figura 5. Distribución de la densidad de energía en una placa de aluminio simplemente apoyada, con  $\eta=0.05$  y  $f=239$  Hz, obtenida con (a) la solución aproximada con el método de Galerkin y (b) la solución exacta reportada por Bouthier y Bernhard (1993).

En el tercer caso se utilizó un factor de pérdida de 0.10, manteniendo la misma frecuencia de excitación (239 Hz), cuya solución se obtuvo con el método de Galerkin, mostrada en la Figura 6. Para este caso, la densidad de energía registra magnitudes menores en comparación con los casos previos (aproximada-



mente 10 dB y 2 dB menores respecto al primer y segundo caso, respectivamente). Este resultado indica que un incremento en el factor de pérdida en la placa provoca una disminución en la distribución de su densidad de energía.

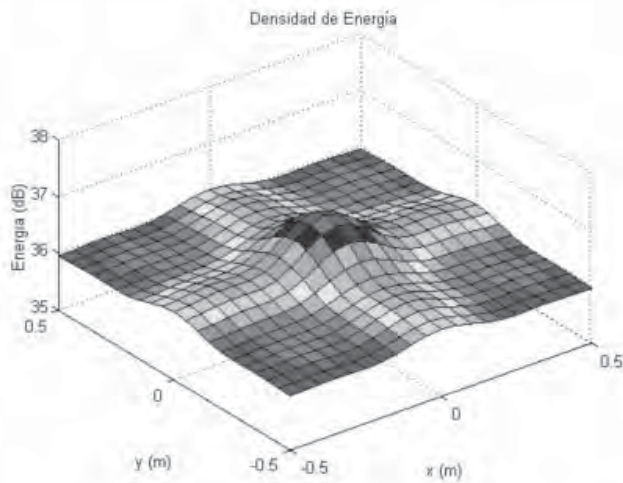


Figura 6. Distribución de la densidad de energía aproximada, obtenida con el método de Galerkin, en una placa de aluminio simplemente apoyada con  $\eta=0.10$  y  $f=239$  Hz.

En el cuarto caso se mantuvo la misma frecuencia de excitación, pero el factor de amortiguamiento de la placa fue incrementado a 0.20. La Figura 7 (a-b) muestra las distribuciones de la densidad de energía en la placa obtenidas con la solución del método de Galerkin y por la solución exacta propuesta por Bouthier y Bernhard (1993). Los resultados de la distribución de la densidad de energía en la placa tienen un comportamiento similar al obtenido con la solución exacta, con un error relativo menor al 7%. Este caso registra la mayor disminución de la densidad de energía en la placa en comparación a los tres primeros, deduciendo que el incremento del factor de pérdida aumentó la disipación de la densidad de energía en la placa de estudio.

#### Casos a la Frecuencia de 487 Hz

En los siguientes casos se utilizó una placa excitada con una fuerza de 10 mN a una frecuencia de 487 Hz.

En lo correspondiente al quinto caso, se utilizó la solución aproximada obtenida con el método de Galerkin para encontrar la distribución de la densidad de energía en la placa con el menor factor de pérdida ( $\eta=0.01$ ), como se muestra en la Figura 8. A diferencia del primer caso, se observa una disminución en la densidad de energía máxima de aproximadamente 3 dB.

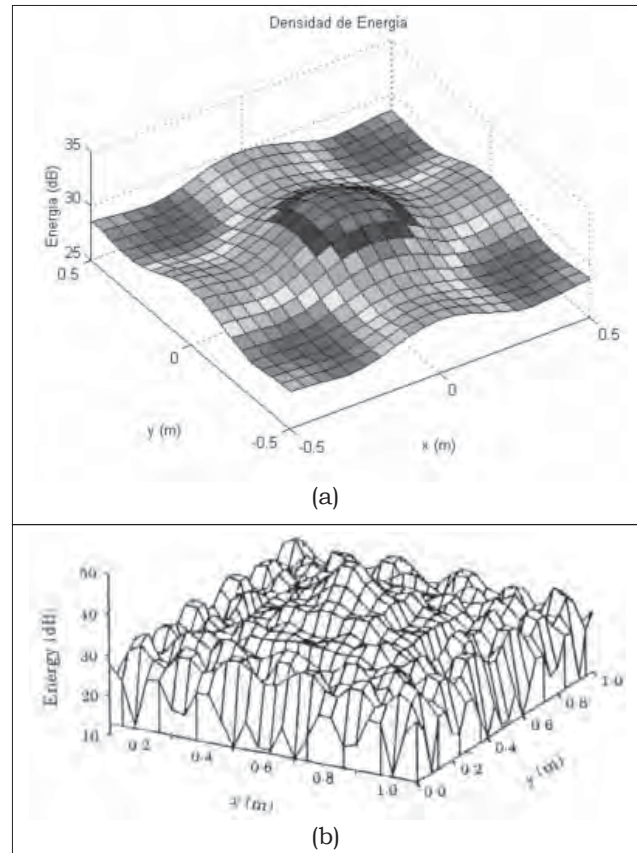


Figura 7. Distribución de la densidad de energía en una placa de aluminio simplemente apoyada, con  $\eta=0.20$  y  $f=239$  Hz, obtenida con (a) la solución aproximada con el método de Galerkin y (b) la solución exacta reportada por Bouthier y Bernhard (1993).

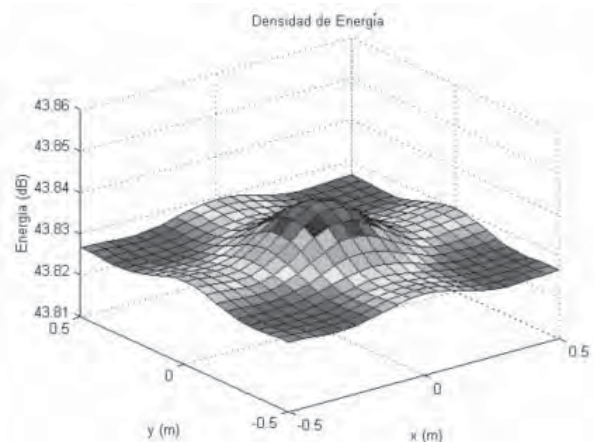


Figura 8. Distribución de la densidad de energía aproximada, obtenida con el método de Galerkin, en una placa de aluminio simplemente apoyada cuando  $\eta=0.01$  y  $f=487$  Hz.

En el sexto caso, se utilizó un factor de pérdida de 0.05 en la placa y se obtuvo la respuesta mostrada en la Figura 9 (a). Este resultado presenta un error relativo del orden de 8% respecto a la solución exacta de referencia, como se muestra en la Figura 9 (b). En relación al segundo caso, que tiene el mismo factor de pérdida, la densidad de energía tiene una disminución de aproximadamente 4 dB, provocado por el incremento en la frecuencia de la fuerza de excitación de 239 Hz a 487 Hz.

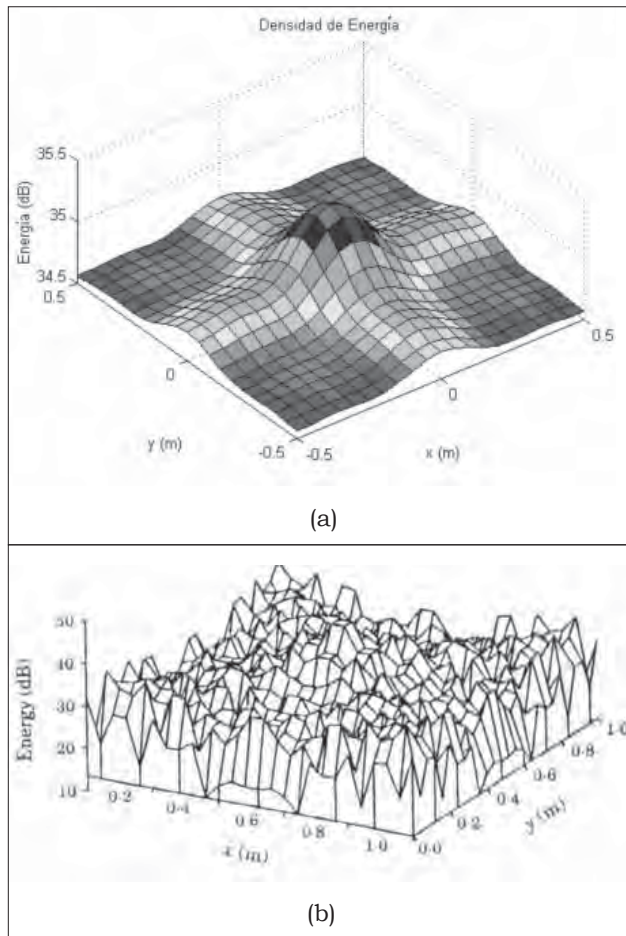


Figura 9. Distribución de la densidad de energía en una placa de aluminio simplemente apoyada, con  $\eta=0.05$  y  $f=487$  Hz, obtenida con (a) la solución aproximada con el método de Galerkin y (b) la solución exacta reportada por Bouthier y Bernhard (1993).

El séptimo caso consideró el factor de pérdida  $\eta=0.10$ . La Figura 10 muestra la distribución de la densidad de energía para este caso, que presenta magnitudes inferiores con respecto a los casos quinto y sexto.

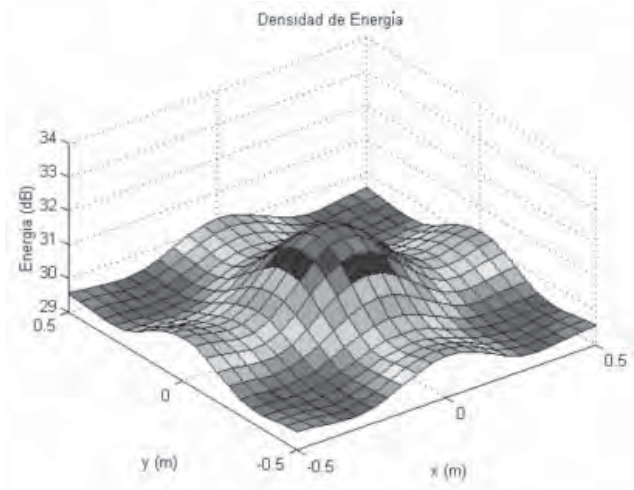


Figura 10. Distribución de la densidad de energía aproximada, obtenida con el método de Galerkin, en una placa de aluminio simplemente apoyada cuando  $\eta=0.10$  y  $f=487$  Hz.

Por último, el octavo caso utilizó un factor de pérdida de 0.20, cuyas distribuciones de energía, aproximada con el método de Galerkin y la exacta de referencia, se muestran en la Figura 11 (a-b). La distribución obtenida por el método de Galerkin presenta un error relativo menor del 10 % respecto a la solución exacta, además de que, se observa un menor valor de la densidad de energía en los extremos de la placa en relación a todos los casos anteriores.

Los incrementos en el factor de pérdida en la placa y la frecuencia de excitación disminuyeron considerablemente la densidad de energía en los extremos de la placa, como muestran los resultados del octavo caso. También, los casos con una frecuencia de excitación de 487 Hz presentaron las disipaciones mayores en la densidad de energía en comparación a los casos sujetos a una frecuencia de excitación de 239 Hz con el mismo factor de pérdida. Cuando se tiene la mayor magnitud del factor de pérdida y se aplica una carga a la placa con la mayor frecuencia de excitación, se presentó una mayor variación en la densidad de energía en la placa.

Posteriormente, se utilizaron los métodos de mínimos cuadrados y Ritz para comparar sus resultados de la densidad de energía en la placa de estudio en relación a los obtenidos con el método de Galerkin. La comparación de los resultados se presenta en la Tabla 1, indicando los valores de la densidad de energía en el punto de aplicación de la fuerza de excitación, es decir, en la parte central de la placa. Los resultados

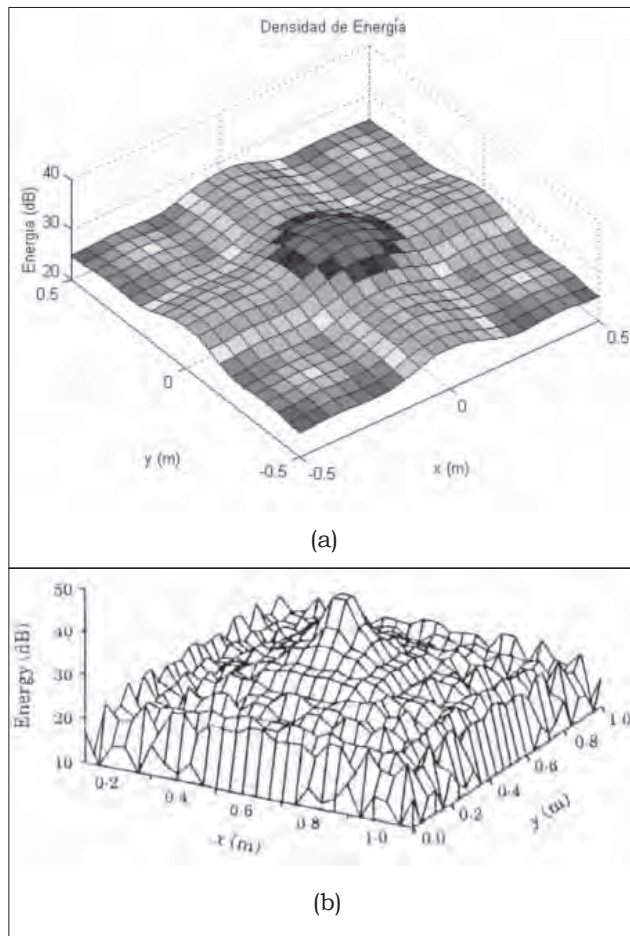


Figura 11. Distribución de la densidad de energía en una placa de aluminio simplemente apoyada, con  $\eta=0.20$  y  $f=487$  Hz, obtenida con (a) la solución aproximada con el método de Galerkin y (b) la solución exacta reportada por Bouthier y Bernhard (1993).

obtenidos por los tres métodos concuerdan aceptablemente, por lo que estos métodos se consideran útiles para la predicción rápida y sencilla de la densidad de energía en placas sujetas a excitaciones externas.

Los métodos de Galerkin, mínimos cuadrados y Ritz se podrían utilizar para encontrar la distribución de la densidad de energía en vigas sujetas a excitaciones armónicas, en donde la ecuación de flujo de energía es similar a la Ec. (2) de placas pero sin el término que contiene la variable  $y$ .

### CONCLUSIONES

Los métodos de flujo de energía son una aproximación adecuada del comportamiento de los sistemas acústicos-estructurales a altas frecuencias. Estos son relativamente sencillos de implementar usando el método de los elementos finitos cuando es posible la aproximación a una onda plana. Para el caso de una placa sujeta a una excitación externa, los métodos de Galerkin, de mínimos cuadrados y Ritz presentaron resultados aceptables (con errores relativos menores del 10 % respecto a la solución exacta) para la predicción rápida y sencilla de la distribución de la densidad de energía en placas.

Los resultados de los ocho casos analizados mostraron una importante disminución de la densidad de energía en los extremos de la placa para el más alto factor de pérdida y la máxima frecuencia de excitación de la carga. Además, para el mismo factor de pérdida un incremento en la frecuencia de excitación causó mayor disipación de la densidad de energía en la placa.

Las soluciones desarrolladas con estos tres métodos mostraron que pueden ayudar a diseñadores e

Tabla 1.

Comparación de la densidad de energía máxima en una placa de aluminio simplemente apoyada y excitada con una carga de 10 mN en la parte central. Los resultados son obtenidos con los métodos de Galerkin, mínimos cuadrados y Ritz.

| Caso | Frecuencia de excitación [Hz] | Factor de pérdida | Densidad de energía máxima en el centro de la placa |                                  |                     |
|------|-------------------------------|-------------------|---|----------------------------------|---------------------|
|      |                               |                   | Método de Galerkin [dB]                             | Método de mínimos Cuadrados [dB] | Método de Ritz [dB] |
| 1    | 239                           | 0.01              | 46.63   | 46.63                            | 46.63               |
| 2    | 239                           | 0.05              | 38.33   | 38.31                            | 38.33               |
| 3    | 239                           | 0.10              | 36.00   | 35.90                            | 36.00               |
| 4    | 239                           | 0.20              | 28.00   | 27.80                            | 28.00               |
| 5    | 487                           | 0.01              | 43.83   | 43.83                            | 43.83               |
| 6    | 487                           | 0.05              | 34.51   | 34.52                            | 34.51               |
| 7    | 487                           | 0.10              | 29.6  | 29.3                             | 29.6                |
| 8    | 487                           | 0.20              | 24.00   | 23.20                            | 24.00               |

ingenieros en el estudio acústico-estructural de sistemas estructurales compuestos en su mayor parte por placas. Esto conduce a que en trabajos futuros se analice la distribución de la densidad de energía en placas interconectadas con diferentes espesores y materiales, además de que se estudie el efecto de diferentes tipos de cargas aplicadas a las placas en la distribución de la densidad de energía.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue apoyado parcialmente por CONACYT mediante una beca de posgrado y por la Universidad de Guanajuato.

## REFERENCIAS

- Aguilera-Cortés, L. A., Herrera-May, A. L., Torres-Cisneros, M., González-Palacios, M. A. y González-Galván, E. J. (2009). Estudio acústico-estructural de la cabina de un vehículo automotriz. *Revista Ingeniería, Investigación y Tecnología, (en prensa)*.
- Bernhard, R. J. y Huff, J. E. (1999). Structural-acoustic design at high frequency using the energy finite element method, *Journal of Vibration and Acoustics* 121 (3) 295-301.
- Bernhard, R. y Wang, S. (2008). Computational acoustic of noise propagation in fluids-finite and boundary element methods, Steffen Marburg y Bodo Nolte (Eds.) *Energy finite element method*. Berlin-Heidelberg: Springer, pp. 287-306.
- Bouthier, O. M. (1992). *Energetics of vibrating systems*, Tesis de doctorado, Universidad de Purdue.
- Bouthier, O. M. y Bernhard, R. J. (1993). Simple models of the energetic of transversely vibrating plates, *Journal of Sound and Vibration* 182 (1) 149-166.
- Cho, P. E. (1993). *Energy flow analysis of coupled structures*. Tesis de doctorado, Universidad de Purdue.
- Cho, P. E. y Bernhard, R. J. (1998). Energy flow analysis of coupled beams. *Journal of Sound and Vibration* 211 (4) 593-605.
- Desmet, W. (2002). Mid-frequency vibro-acoustic modelling: challenges and potential solutions. *Proceedings in ISMA 2002*, Leuven, Bélgica, 835-862.
- Fan, R., Meng, G., Yang, J. y He, C. (2009). Experimental study of the effect of viscoelastic damping material on noise and vibration reduction within railway vehicles. *Journal of Sound and Vibration* 319 (1-2) 58-76.
- Lyon, L. H. y Dejong R. G. (1995). *Theory and application of statistical energy analysis*, Boston: Butterworth-Heinemann.
- Mailing, G. (2007). Springer handbook of acoustic, Tomas D. Rossing (Ed.). *Noise*. New York: Springer, pp. 961-1017.
- Pavic, G. (2005). The role of damping on energy and power in vibrating systems. *Journal of Sound and Vibration* 281 (1-2) 45-71.
- Pavic, G. (2006). Vibration damping, energy and energy flow in rods and beams: governing formulae and semi-infinite systems. *Journal of Sound and Vibration* 291 (3-5) 932-962.
- Seong-Hoon, S., Suk-Yoon, H. y Hyun-Gwon, K. (2003). Power flow analysis of reinforced beam-plate coupled structures. *Journal of Sound and Vibration* 259 (5) 1109-1129.
- Vlahopoulos, N., Wang, A. y Wu, K. (2005). An EFEA formulation for computing the structural response of complex structures. *Proceedings of IMECE 05, 2005 ASME IMECE, Orlando, FL, artículo No. 81113*.
- Vlahopoulos, N., Garza-Rios, L. O. y Mollo, C. (1999). Numerical implementation, validation and marine applications of an energy finite element formulation, *Journal of Ship Research* 43 (3) 143-156.
- Wang, S. y Bernhard, R. J. (1999). Energy finite element method (EFEM) and statistical energy analysis (SEA) of a heavy equipment cab. *Proceedings of SAE 99 Noise & Vibration Conference*, Traverse City 443-450.
- Wang, S. y Bernhard R. J. (2009). Prediction of averaged energy for moderately damped systems with strong coupling, *Journal of Sound and Vibration* 319 (1-2) 426-444.
- Wang, S. y Bernhard, R. J. (1998). The energy finite element method applied to a heavy equipment cab. *Proceedings of Internoise 98*, Christchurch, artículo No. 229.
- Wohlever, J. C. y Bernhard, R. J. (1992). Mechanical energy flow models of rods and beams, *Journal of Sound and Vibration* 153 (1) 1-19.
- Yan, X. (2008). *Energy finite element analysis developments for high frequency vibration analysis of composite structures*. Tesis de doctorado, Universidad de Michigan.