Legris, Javier

Algebras para la lógica: Algunos aspectos filosóficos

Revista de Filosofía y Teoría Política

1986, no. 26-27, p. 276-278

Algebras para la lógica: Algunos aspectos filosóficos

Javier Legris

1

La idea de construir una álgebra que expresara matemáticamente propiedades formales de conceptos lógicos tiene hoy más de un siglo. En 1847 G. Boole presentó un sistema algebraico asociable al cálculo de conectivas y al cálculo de clases, que actualmente se conoce bajo el nombre de "álgebra booleana". Poco después C. S. Peirce construyó una "Lógica de los Relativos" con la que trató algebraicamente el cálculo de cuantificadores y que sumada a la parte booleana conformó un "Algebra General de la Lógica".

A mediados de nuestro siglo aparecieron estructuras algebraicas que daban cuenta de manera más perfecta y acabada de la lógica de primer orden, entendida como aquel cálculo en el que sólo se cuantifican variables de individuo y cuyas fórmulas contienen un número finito de variables. Estas son las "álgebras poliádicas" desarrolladas básicamente por P. R. Halmos en (1) y las "álgebras cilíndricas" debidas principalmente al genio de A. Tarski (véase (2)). Las últimas incluyen además una formulación algebraica de la teoría de la identidad. Pues bien, señalar algunas consecuencias filosóficas que se extraen de estas álgebras constituye el objetivo de este trabajo.

2

Dicho informalmente, una manera de presentación de las álgebras booleanas consiste en un conjunto no-vacío cerrado respecto de tres operaciones, dos binarias y la restante unaria, que reciben respectivamente los nombres de suma, producto y complemento. Las dos primeras son conmutativas, asociativas, idempotentes y distributivas entre sí.

Referencias

(1) HALMOS, P. R.: *Algebraic Logic.* New York, Chelsea, 1962.
(2) HENKIN, L., MONK, J. D. y TARSKI, A.: *Cylindric Algebras.* Part I. Amsterdam-London, North-Holland, 1971.

En el álgebra se determinan además dos elementos distinguidos: el elemento cero y el elemento unidad, y se define una relación de orden parcial: la inclusión booleana. Una formulación axiomática puede encontrarse, por ejemplo, en Sikorski (3) p. 11. El álgebra de conjuntos con la unión, la intersección y la complementación como operaciones es un caso concreto de álgebra booleana.

Las analogías formales entre el álgebra booleana y el cálculo de conectivas son ampliamente conocidas: las operaciones booleanas se corresponden con las conectivas disyunción, conjunción y negación; el elemento unidad con las tautologías; el elemento cero con las contradicciones, y la inclusión con la relación de deducción. Estas analogías quedan garantizadas por la construcción de un álgebra de Lindenbaum-Tarski para el cálculo de conectivas; esto es, un álgebra de conjuntos cuyos elementos son clases de equivalencia de fórmulas del cálculo de conectivas y cuyas operaciones son definidas precisamente mediante las conectivas lógicas.

Las álgebras poliádicas y cilíndricas no son más que álgebras booleanas enriquecidas con operaciones adicionales. Por ejemplo, en las álgebras poliádicas se define una nueva operación unaria en términos de una función que tiene su rango en una suma finita de ciertos elementos de un álgebra booleana, siendo además la operación relativa a un subconjunto de un conjunto dado de índices. Esta operación es el correlato algebraico del cuantificador existencial y el conjunto de índices se corresponde con el conjunto de variables de individuo del lenguaje de primer orden. La correlación entre la estructura algebraica así obtenida y la lógica de primer orden queda establecida también por un álgebra de Lindenbaum-Tarski adecuada.

La determinación de estas álgebras ha hecho posible que, por un lado, las formas intuitivas de razonamiento recogidas y formalizadas en los sistemas lógicos pasen a tener una estructura algebraica exacta. Por otro lado, han sido aplicadas con éxito en demostraciones de consistencia y completud de la lógica de primer orden, dando así lugar a una metateoría de naturaleza algebraica para la lógica de primer orden.

3

Más allá de estos aspectos metodológicos, la existencia de estructuras algebraicas asociadas a la lógica de primer orden puede dar también alguna información relevante acerca de la naturaleza de la lógica. Más precisamente, la construcción de las mismas nos muestra la estructura invariante subyacente a la lógica de primer orden, nos muestra, por así decirlo, el entramado formal que permanece constante en todo lenguaje de primer orden. Es éste sin duda el resultado filosófico más significativo del tratamiento algebraico de la lógica. Existen potencialmente infinitos lenguajes de primer orden, todos ellos diferentes en virtud de sus símbolos específicos: sus términos y predicados; sin embargo, todos estos lenguajes tienen en común la misma estructura lógica, expresada a través de la maquinaria de las álgebras cilíndricas o las poliádicas.

De aquí resulta una concepción de la lógica que podemos llamar "operacionalista" o "estructuralista", según la cual la lógica es entendida como un conjunto de operaciones algebraicas subyacente a los lenguajes de primer orden. Asimismo, desde este punto de

(3) SIKORSKI, R.: *Boolean Algebras*. Berlin-Göttingen-Heidelberg-N. York, Springer, 2a. ed., 1964.

vista la lógica deja de ser una entidad de naturaleza puramente lingüística, fundada únicamente en reglas de combinación de signos o en convenciones lingüísticas, sino que la lógica se funda más bien en una estructura abstracta externa al lenguaje.

Con todo, aparecen en este punto dos problemas. El primero de ellos consiste en la reducción de la lógica al álgebra que esta concepción conlleva. Dicho rápidamente, la lógica pasaría a ser tan sólo un capítulo del álgebra; es decir, la lógica de primer orden sería vista como un caso concreto de una determinada estructura algebraica abstracta. Frente a ello se puede hacer la siguiente observación. El objeto y la función de la lógica consisten, como es habitual señalar, en determinar la corrección de los razonamientos deductivos, en reconstruir racionalmente nuestras formas intuitivas de razonamiento. Esto es propio e inalienable de la lógica y se halla ausente en el álgebra, pues escapa a sus intereses y problemática. El álgebra, más bien, debe verse como una herramienta que la lógica emplea en su metateoría para alcanzar aquellos objetivos.

El segundo problema radica en la actitud platonista que parece emerger de la concepción de la lógica recién esbozada. En efecto, es un hecho que tendemos naturalmente a agrupar diferentes objetos en categorías de acuerdo con sus propiedades comunes, y estas categorías no nos parecen arbitrarias, adjudicándoles algún tipo de existencia objetiva. Pues bien, esta conducta desemboca en un argumento clásico de carácter platonista: el descubrimiento de algo común nos lleva a afirmar la existencia de eso que es común; o, visto desde otra perspectiva, no podríamos establecer semejanzas entre objetos si no nos representáramos aquello en virtud de lo cual son semejantes. Un ejemplo de esta forma de argumentación lo hemos dado al afirmar que todos los lenguajes de primer orden comparten la misma estructura algebraica. Desde luego, la aceptación o rechazo de este platonismo dependerá de la concepción filosófica que se adopte respecto de la existencia de las entidades matemáticas.