Acta Universitaria
DIRECCIÓN DE APOYO A LA INVESTIGACIÓN Y AL POSGRADO

Supersimetrías y Parasimetrías de la Ecuación de Riccati

Marco A. Reyes y José Socorro**

ABSTRACT

It is shown how the Riccati equation allows introducing, in a colloquial way, different symmetries of mathematical physics equations. In particular, we use the definition of supersymmetry in Quantum Mechanics, obtained after working out the second solution to the Riccati equation for the equations of the model, to introduce the parasymmetry of other mathematical physics equations and of other science fields.

RESUMEN

Se describe cómo la ecuación de Riccati nos permite definir de manera coloquial diferentes simetrías en ecuaciones de la física matemática. En particular utilizamos la definición de *supersimetría* en Mecánica Cuántica, obtenida al desarrollar la segunda solución de Riccati para las ecuaciones del modelo, para introducir la *parasimetría* de otras ecuaciones de la física matemática y de otras áreas de las ciencias.

Recibido: 11 de Junio de 2009
Aceptado: 1 de Octubre de 2009

INTRODUCCIÓN

La ecuación de Riccati, cuya forma más general es:

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x) \tag{1}$$

es una de las ecuaciones básicas de la física matemática. Esta ecuación fue estudiada por el Conde Jacopo Francesco Riccati a inicios del siglo XVIII. Durante el siglo XIX se demostró que no existe una solución elemental de esta ecuación, lo que aunado a su no-linealidad, hace que cada caso particular sea bastante complicado de resolver.

SUPERSIMETRÍAS

En la física matemática actual probablemente la aparición más renombrada de la ecuación de Riccati es en la Mecánica Cuántica. Bogdan Mielnik (1984), del Departamento de Física del CINVESTAV, encontró que la factorización del Hamiltoniano del Oscilador Armónico Simple (OAS), con potencial $V(x) = \frac{1}{2}x^2$,[1]

$$H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 \tag{2}$$

mediante los operadores de creación y aniquilación

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + x\right) \quad , \quad A^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + x\right) \quad , \quad H = AA^* - \frac{1}{2} \tag{3}$$

Keywords:
Riccati Equation, Supersymmetry, Logistic Equation

Palabras clave:
Ecuación de Riccati, Supersimetría, Ecuación Logística

* Departamento de Física, División de Ciencias e Ingenierías, Campus León, Universidad de Guanajuato, Loma del Bosque 103, Col. Lomas del Campestre, León, Gto. C.P. 37150 Tel., Fax: (477) 7885100, Correo electrónico: marco@fisica.ugto.mx

[1] Por simplicidad se utiliza $\hbar$=m=ω=1

no es única, pues los operadores

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{d}{dx} + \beta(x)\right), \quad B^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{d}{dx} + \beta(x)\right), \tag{4}$$

también permiten factorizarlo, siempre y cuando la función $\beta(x)$ cumpla la ecuación de Riccati

$$\beta' + \beta^2 = 1 + x^2 \ , \tag{5}$$

donde la prima denota derivada con respecto a x. Obviamente, una primera solución a esta ecuación es $\beta(x)=x$.

Es bien sabido que si se conoce una primera solución de una ecuación de Riccati y_1, una segunda solución y_2 se obtiene mediante la transformación

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{\phi(x)} \tag{6}$$

En el caso del OAS, la segunda solución de la ecuación de Riccati conduce a los operadores (4) con $\beta(x)$ dada por

$$\beta(x) = x + \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-x^2}}{\lambda + \int e^{-x^2} dx}\right), \tag{7}$$

donde el parámetro $|\lambda| \in \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \infty\right)$. Mielnik (1984) encontró que aunque el orden de los operadores A y A^* no es relevante para factorizar al Hamiltoniano del OAS ($A^*A=H-½$), el orden de los operadores B y B^* sí lo es, pues se tiene el producto

$$B^*B = \tilde{H} - \frac{1}{2} \tag{8}$$

donde $\tilde{H}$ es un nuevo operador Hamiltoniano $\tilde{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \tilde{V}(x)$ cuyo potencial

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-x^2/2}}{\lambda + \int e^{-x^2/2} dx}\right) \tag{9}$$

y eigenfunciones

$$\tilde{\psi}_{n+1}(x) = B^*\psi_n(x), \tag{10}$$

siendo $\psi_n(x)$ las eigenfunciones originales, tienen el mismo espectro que el OAS,

$$\tilde{H}\tilde{\psi}_m = E_m\tilde{\psi}_m, \quad E_m = m + \frac{1}{2}, \tag{11}$$

con excepción del estado base $\tilde{\psi}_0(x)$, el cual no puede calcularse como en la ec.(10), sino que ha de ser determinado independientemente.

Esta propiedad de los Hamiltonianos cuánticos, de que su factorización puede llevar a nuevos potenciales que son isoespectrales al original, denotando una nueva simetría del sistema, lleva el nombre de ***supersimetría*** (SUSY). La mayoría de los potenciales de la mecánica cuántica pueden ser supersimetrizados, además de que SUSY permite otras aplicaciones en la teoría[2]. Aún más, es posible desarrollar una ulterior supersimetría cuántica que lleva el nombre de SUSUSY (Fernández, D. J., 1997).

En general, al parámetro $\boldsymbol{\lambda}$ se le conoce como el parámetro de supersimetría. Aquí simplemente lo llamaremos el parámetro de Riccati. Las eigenfunciones y potenciales supersimétricos tienen la característica de presentar ligeras deformaciones en su estructura, como puede apreciarse en la forma del superpotencial $\tilde{V}(x)$ para el OAS, mostrada en la Fig.1 para diferentes valores del parámetro de Riccati.

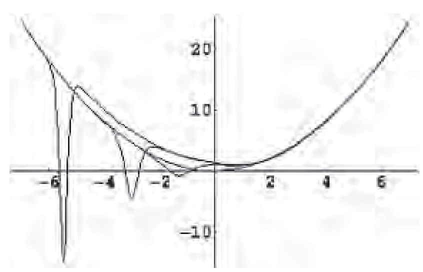

Figura 1. Potenciales isoespectrales a los del OAS, $\tilde{V}(x)$, para varios valores del parámetro de Ricccati, λ.

PARASIMETRÍAS

La aparición de la ecuación de Riccati en la factorización del Hamiltoniano cuántico es lo que permite realizar la supersimetría. Dicha ecuación aparece en muchos sis-

[2] SUSY en general viene descrito en el libro de Cooper, F. (2001).

temas dinámicos, y no solo físicos. Por ejemplo, ecuación de Verhulst o ecuación logística[3]

$$\dot{x} = r\,x(1 - x) \qquad (12)$$

es una ecuación de Riccati con aplicaciones en diferentes áreas, como biología, demografía, economía, química, probabilidad y estadística. La (primera) solución a esta ecuación está dada por

$$x_1(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x_{10}} - 1\right)e^{-rt}} \qquad (13)$$

Nuestro objetivo aquí será buscar la segunda solución a esta ecuación por el método descrito arriba, con el fin de averiguar una posible relevancia matemática del modelo. Al realizar la segunda solución de Riccati encontramos que ésta está dada por

$$x_2(t) = x_1(t)\left(1 + \frac{1}{\lambda\left[e^{rt} + \left(\frac{1}{x_{10}} - 1\right)\right] - 1}\right) \qquad (14)$$

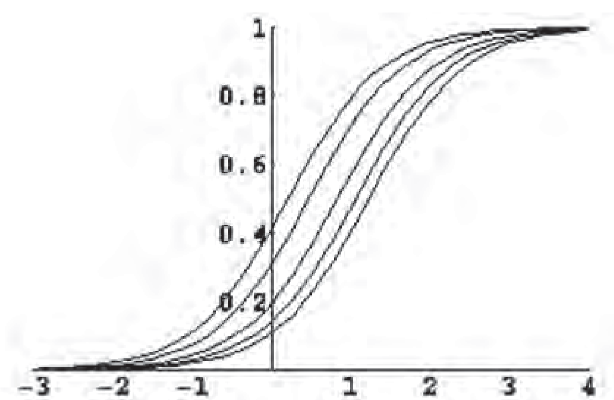

Figura 2. Segunda solución de Riccati para la Ecuación Logística, para varios valores del parámetro de Riccati λ, para r =1.7 y x_{10}=0.11. Nótese que ahora las nuevas funciones tienen la misma forma que la solución original, apareciendo solo un cambio en la condición inicial $x(t=0)$.

Como podemos ver en la Fig.2, a diferencia de los casos supersimétricos, esta segunda solución no aporta una nueva estructura en la solución del problema, pues las nuevas soluciones mantienen la misma forma que la solución original. De hecho, se puede mostrar que la única manera de obtener la misma condición inicial $x_2(0)=x_1(0)$ es que el parámetro de Riccati sea $\lambda=\infty$, y que la segunda solución de Riccati a la ecuación logística tiene exactamente la misma forma que la ec.(13), con la condición inicial

$$x_{20} = \frac{\lambda x_{10}}{\lambda - x_{10}} \; .$$

De esta igualdad se puede ver que el parámetro de Riccati en este caso corre entre los valores $\lambda \in (x_{10}, \infty)$. Como la ecuación logística no pierde su forma ante el mismo proceso que llevó a la aparición de supersimetría, sino que las nuevas curvas *se aproximan* a la original, diremos que la ecuación logística es ***parasimétrica*** durante este proceso.

Algunas ecuaciones de la física matemática que contienen ecuaciones de Riccati son la Ecuación Modificada de Emdem y la Ecuación Convectiva de Fisher (véase Rosu,H.C., 2005). La Ecuación Modificada de Emden

$$\ddot{u} + \alpha u\dot{u} + \beta u^3 = 0 \qquad (15)$$

puede ser factorizada en

$$(D - a_1^{-1}\sqrt{\beta}u)(D - a_1\sqrt{\beta}u)u = 0\,, \qquad (16)$$

en donde $D \equiv \frac{d}{d\tau}$. Como podemos ver, los dos últimos términos de la factorización determinan una ecuación de Riccati que tiene como primera solución

$$u_1(\tau) = -\frac{1}{a_1\sqrt{\beta}\,(\tau - \tau_0)} \; . \qquad (17)$$

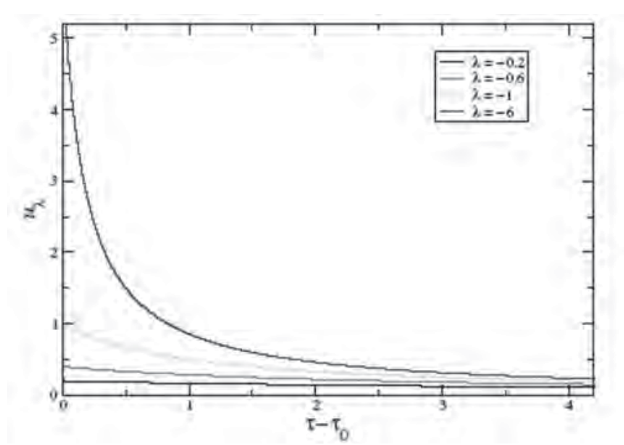

Figura 3. Segunda solución de Riccati para la Ecuación Modificada de Emden, para varios valores del parámetro de Riccati λ.

[3] Véase, por ejemplo, Boyce, W., y DiPrima, R., (1992).

De ésta podemos obtener la segunda solución paramétrica de Riccati

$$u_\lambda(\tau) = -\frac{1}{a_1\sqrt{\beta}\,(\tau-\tau_0)} + \frac{1}{\lambda(\tau-\tau_0)^2 + a_1\sqrt{\beta}\,(\tau-\tau_0)} \qquad (18)$$

La forma de esta segunda solución en términos del parámetro de Riccati λ se puede apreciar en la Fig.3.

En el caso de la ecuación de la Ecuación Convectiva de Fisher,

$$\ddot{u} + 2(v-\mu u)\dot{u} + 2u(1-u) = 0 \qquad (19)$$

la primera solución, para $v = \frac{\mu}{2} + \mu^{-1}$, a la factorización

$$\left(D+\frac{2}{u}\right)\left(D+\mu(1-u)\right)u = 0 \qquad (20)$$

es

$$u_1(\tau) = \frac{1}{1 \pm e^{u(\tau-\tau_0)}} \qquad (21)$$

mientras que la segunda solución paramétrica de Riccati es

$$u_\lambda = u_1 + \frac{e^{-\mu(\tau-\tau_0)}}{\left(e^{-\mu(\tau-\tau_0)} \pm 1\right)\left(\lambda\left(e^{-\mu(\tau-\tau_0)} \pm 1\right) - 1\right)} \qquad (22)$$

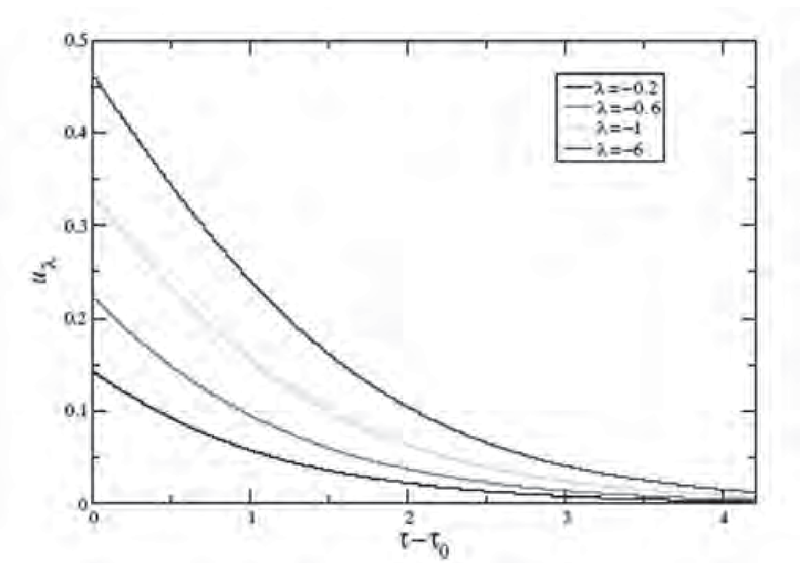

Figura 4. Segunda solución de Riccati para la Ecuación Convectiva de Fisher, para varios valores del parámetro de Riccati *λ*.

Diferentes formas de esta solución paramétrica están dibujadas en la Fig.4.

Podemos ver que en ambos casos la solución paramétrica $u_\lambda(\tau)$ varía desde la solución trivial u_λ=0, hasta la solución $u_1(\tau)$ conforme el parámetro de Riccati varía entre *λ*=0 y *λ*=∞, tendiendo a la solución inicial, al igual que sucedió con la ecuación logística. Esto quiere decir que estas ecuaciones también son ***parasimétricas*** ante el proceso de factorización descrito.

CONCLUSIÓN

Aquí hemos descrito como la segunda solución a la ecuación de Riccati nos permite definir diferentes simetrías de ecuaciones de la física matemática. La ***supersimetría*** tiene que ver con la generación de soluciones isoespectrales a las ecuaciones de la Mecánica Cuántica. Por su parte la ecuación logística conserva íntegramente su forma ante una segunda solución definida por la transformación de la ec.(6), por lo que presenta una ***parasimetría*** ante ésta, al igual que las ecuaciones modificada de Emdem y convectiva de Fisher.

REFERENCIAS

Boyce, W., y DiPrima, R. (1992). *Elementary Differential Equations* (5a ed.). John Wiley & Sons, New York, p. 54.

Cooper, F., Khare, A., y Sukhatme, U. (2001). *Supersymmetry in quantum mechanics.* World Scientific, ISBN 9810246129.

Fernández, D.J. (1997). SUSUSY quantum mechanics. *Int. J. Mod. Phys.* A12 171-176.

Mielnik, B. (1984). Factorization method and new potentials with the oscillator spectrum. *J. Math. Phys.* 25, 3387-3389.

Rosu, H. C. (2005). *Nonlinear second order ODE's: Factorizations and particular solutions.* Prog. Theor. Phys. 114, 533-538, y referencias en este artículo.